Theoretische und praktische Untersuchung der Kármánschen Schlitzschaufel-Kreiselräder

---

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Ernst Martin Gauger
aus Stettin

Referent:
Professor Dr.-Ing. H. Baer

Korreferent:
Professor R. Krauß

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Januar 1934

Großbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1934

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

I. Teil.

Theorie.

		Seite
1.	Kennlinien der Turboarbeitsmaschinen	1
2.	Die Kármánsche Schlitzschaufelanordnung als Vorschlag zur Verbesserung der Druckvolumenkurve	5
3.	Die Prandtl-Kármánsche Grenzschichttheorie	7
4.	Die laminare Wandschicht bei turbulenter Strömung	7
5.	Experimentelle Untersuchungen der turbulenten Grenzschicht	9
6.	Übertragung auf turbulente Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht	16
7.	Die Integralbedingung bei turbulenter Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht	17
8.	Die Berechnung des Ablösungspunktes	19
9.	Beispiele zum Beweise der Übereinstimmung mit Versuchswerten	22
	a) Kritischer Öffnungswinkel bei turbulenter Strömung durch gerade Diffusoren	22
	b) Ablösungspunkt bei turbulenter Strömung um einen Zylinder	25
10.	Theoretische und wirkliche Geschwindigkeitsverteilung im Kreiselradkanal	28
11.	Der Ablösungspunkt an der Kreiselradschaufel	34
12.	Notwendige Schlitzbreite zur Verhinderung der Ablösung	37

II. Teil.

Versuche.

13.	Versuchsanordnung	42
14.	Reihenfolge der Versuche	47
15.	Rechnungsgrundlagen	48
16.	Auswertung	53
17.	Zusammenfassung	63

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543114_0008

Bezeichnungen.

Bez.	Dim.	Bedeutung	erstmals verwendet Seite
P	kg/m²ü	Theoretischer Überdruck eines Kreiselrades . .	1
V	m³/sec	Sekundliches Fördervolumen	1
γ	kg/m³	Spezifisches Gewicht	1
g	m/sec²	Erdbeschleunigung	1
u_2	m/sec	Umfangsgeschwindigkeit	
c_{m_2}	m/sec	Meridiankomponente der Absolutgeschwindigkeit	der Strömung durch ein Kreiselrad am Austritt . . 1
c_{u_2}	m/sec	Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit	
β_2	o	Schaufelwinkel	
d_2	m	Durchmesser	eines Kreiselrades am Austritt 1
b_2	m	Breite	
p	kg/m²abs	Statischer Druck in einer strömenden Flüssigkeit	7
x	m	Abszisse in Richtung der Flüssigkeitsbegrenzung	7
y	m	Ordinate senkrecht zu x (Wandabstand) . . .	7
u	m/sec	Geschwindigkeit in der Grenzschicht in x-Richtung	7
v	m/sec	Geschwindigkeit in der Grenzschicht in y-Richtung	7
ϱ	kgsec²/m⁴	Spezifische Masse $= \frac{\gamma}{g}$	7
μ	kgsec/m²	Absolute Zähigkeit	8
ν	m²/sec	Kinematische Zähigkeit $= \frac{\mu}{\varrho}$	7
U	m/sec	Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht in x-Richtung	8
δ	m	Grenzschichtdicke	8
τ_0	kg/m²	Schubspannung der Flüssigkeit an der Wand .	8
δ_1	m	Dicke der laminaren Wandschicht bei turbulenter Strömung	9
u_1	m/sec	Geschwindigkeit in x-Richtung bei δ_1	9

Bez.	Dim.	Bedeutung	erstmals verwendet Seite
Z	—	Zijnensche Zahl $= \frac{u_1 \delta_1}{\nu}$	10
δ_2	m	Wandabstand des Schnittpunktes der Geraden $y = \frac{u\mu}{\tau_0}$ mit der $\frac{1}{7}$-Potenzkurve	10
u_2	m/sec	Geschwindigkeit in x-Richtung bei δ_2	10
k	—	Exponent	der Geschwindigkeitsparabel für die laminare Wandschicht bei konstanter äußerer Strömungsgeschwindigkeit . .	12
A	m/sec	Koeffizient		
B	m	Koeffizient		
u_l	m/sec	Geschwindigkeit in der laminaren Wandschicht	15
ξ	$m^{\frac{5}{4}}$	Substituierte Funktion $= \delta^{\frac{5}{4}}$	18
$\varphi(x)$	1/m	Substituierte Funktion $= 4{,}11 \frac{U'}{U}$	19
$\psi(x)$	$m^{\frac{1}{4}}$	Substituierte Funktion $= -0{,}289 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}}$ . . .	19
a	1/sec	Koeffizient	der Geschwindigkeitsparabel für die laminare Wandschicht bei variabler äußerer Strömungsgeschwindigkeit . .	20
b	1/msec	Koeffizient		
c	$1/m^2sec$	Koeffizient		
D	m	Rohrdurchmesser bzw. Abstand der parallelen Kanalwände	23
α	o	Öffnungswinkel eines Diffusors	23
Θ	o	Polarwinkel	25
U_0	m/sec	Zuströmgeschwindigkeit im Unendlichen . . .	25
r_0	m	Radius eines umströmten Zylinders	26
Re_z	—	Reynoldsche Zahl für die Strömung um einen Zylinder $= \frac{2 U_0 r_0}{\nu}$	27
ω	1/sec	Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Schaufelkanals	28
w	m/sec	Relativgeschwindigkeit im Schaufelkanal . . .	28
q	m	Länge einer Orthogonaltrajektorie zu den Stromlinien im Schaufelkanal. $q = 0$ an der Schaufelvorderseite	28
r_s	m	Krümmungsradius einer Stromlinie	28
b_s	m	Breite des Schaufelkanals in Achsenrichtung .	29
V_s	m^3/sec	Fördervolumen pro Schaufelkanal	29
w_v	m/sec	Relativgeschwindigkeit an der Schaufelvorderseite	29

Bez.	Dim.	Bedeutung	erstmals verwendet Seite
n	1/Min	Drehzahl	
d_1	m	Schaufeleintrittsdurchmesser } eines Kreiselrades	30
z	—	Schaufelzahl }	
U_E	m/sec	Relativgeschwindigkeit an der Schaufelrückseite beim Eintritt in den Schaufelkanal	34
$F(x)$	1/sec	Hilfsfunktion $= \frac{U^{\frac{13}{8}}}{6500\,\nu^{\frac{5}{8}}\,\delta^{\frac{3}{8}}}$ } zur Bestimmung des Ablösungspunktes an der Schaufelrückseite	35
$f(x)$	1/sec	Hilfsfunktion $= -\frac{dU}{dx}$ }	
u_a	m/sec	Vorhandene Geschwindigkeit in der Grenzschicht am Ablösungspunkt	37
U_a	m/sec	Vorhandene Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht am Ablösungspunkt	38
δ_a	m	Vorhandene Grenzschichtdicke am Ablösungspunkt	38
u_n	m/sec	Notwendige Geschwindigkeit in der Grenzschicht am Ablösungspunkt	38
U_n	m/sec	Notwendige Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht am Ablösungspunkt	38
δ_n	m	Notwendige Grenzschichtdicke am Ablösungspunkt	38
I_n	kg	Notwendiger Zusatzimpuls zur Verhinderung der Ablösung	38
s	m	Breite des Schaufelschlitzes	38
w_s	m/sec	Theoretische Strömungsgeschwindigkeit im Schaufelschlitz	38
Δh	m	Mittlerer Druckhöhenunterschied zwischen Vorder- und Rückseite einer Schaufel . . .	38
r	m	Abstand eines beliebigen Schaufelpunktes von der Radachse	39
r_1	m	Schaufeleintrittsradius	39
r_2	m	Schaufelaustrittsradius	39
Md_{Schaufel}	kgm	Drehmoment pro Schaufel	39
Md_{Rad}	kgm	Drehmoment pro Rad	39
M_{sec}	kgsec/m	Sekundlicher Massenstrom durch das Kreiselrad	40
p_a	mm WSü	Gemessener Ansaugedruck	43
P_a	kg/m²abs	Absoluter Ansaugedruck	48

Bez.	Dim.	Bedeutung	erstmals verwendet Seite
p_e	mm WSü	Gemessener Enddruck	43
P_e	kg/m²abs	Absoluter Enddruck	48
t_a	°C	Gemessene Ansaugetemperatur	43
T_a	°abs	Absolute Ansaugetemperatur	48
t_e	°C	Gemessene Endtemperatur	43
V_d	m³/sec	Durch eine Düse sekundlich strömendes Volumen	48
k_d	—	Düsenkoeffizient	48
c_d	m/sec	Geschwindigkeit im engsten Düsenquerschnitt	48
$pd_{1\text{tot}}$	mm WSü	Gemessener Totaldruck vor Düse	48
$pd_{2\text{stat}}$	mm WSü	Gemessener statischer Druck nach Düse	48
Δpd	mm WS	Gemessene Druckdifferenz $= pd_{1\text{tot}} - pd_{2\text{stat}}$	48
Pd_2	kg/m²abs	Absoluter statischer Druck nach Düse	49
td_1	°C	Gemessene Temperatur vor Düse	43
Td_1	°abs	Absolute Temperatur vor Düse	49
R	mkg/kg°	Gaskonstante	49
N_{pol}	KW	Polytropische Verdichtungsleistung	50
$N_{\text{aufgew.}}$	KW	Theoretisch aufgewendete Leistung	50
$N_{\text{gem.}}$	KW	Gemessene Leistung	55
m	—	Exponent der Polytrope	50
c_p	kcal/kg°	Spezifische Wärme bei konstantem Druck	50

I. Teil

Theorie

1. Kennlinien der Turboarbeitsmaschinen

Nach der ersten Hauptgleichung der Turbinentheorie ergibt sich der theoretische Überdruck eines Kreiselrades bei radialem Eintritt zu

$$P = \frac{\gamma}{g} u_2 c_{u_2} = \frac{\gamma}{g} u_2 (u_2 - \operatorname{ctg} \beta_2 c_{m_2}) \tag{1}$$

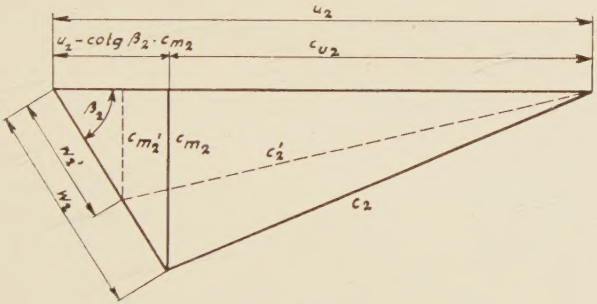

Fig. 1
Austrittsdiagramme eines Kreiselrades
für konstante Drehzahl und veränderliche Fördermenge

Drückt man in dieser Gleichung die Meridiangeschwindigkeit c_{m_2} durch die sekundliche Fördermenge und die Radabmessungen aus

$$c_{m_2} = \frac{V}{\pi d_2 b_2}, \tag{2}$$

wobei unendlich viele Schaufeln vorausgesetzt sind, so erhält man die Beziehung

$$P = \frac{\gamma}{g} u_2 \left(u_2 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{\pi d_2 b_2} V \right), \tag{3}$$

welche den theoretischen Zusammenhang zwischen Druck und Fördermenge bei einer bestimmten Drehzahl angibt.

Man erkennt aus der Gleichung (3), daß die theoretischen Druckvolumenkurven Geraden sind, deren Neigung durch den Austrittswinkel β_2 des Rades bestimmt wird. Vorwärts gekrümmte Schaufeln haben eine steigende, rückwärts gekrümmte eine fallende P-V-Linie, während der Druck bei Radialschaufeln unabhängig von der Fördermenge und nur eine Funktion der Umfangsgeschwindigkeit am Austritt ist.

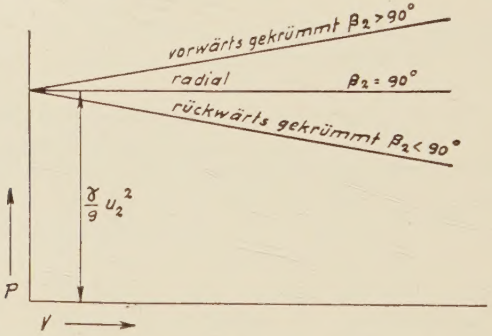

Fig. 2
Theoretische Druckvolumenkurven
bei radialem Eintritt

Da man vorwärts gekrümmte und Radialschaufeln ihrer großen Labilität im Betriebe und ihres schlechteren Wirkungsgrades wegen fast nie verwendet, sollen im folgenden nur rückwärts gekrümmte Schaufeln behandelt werden.

Bei der Ableitung der Gleichung (1) ist sowohl eindimensionale als auch reibungsfreie Strömung vorausgesetzt. Nun sind bei der wirklichen Strömung beide Voraussetzungen nicht genau erfüllt. Deshalb ist es erklärlich, daß die wirkliche P-V-Kurve einen etwas anderen Charakter zeigt.

Behält man die Voraussetzung der Reibungsfreiheit der Strömung bei, so kann man auch in der Theorie der Tatsache Rechnung tragen, daß nicht unendlich viele, sondern eine endliche Anzahl von Schaufeln vorhanden sind, allerdings nur für den Spezialfall parallelwandiger Räder. Man zerlegt nach Spannhake[1)–5)] die Strömung zu diesem

[1)] Spannhake: Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern. Hydraulische Probleme. VdI-Verlag 1926 S. 180.

Zwecke in die drei Bestandteile der Durchflußströmung, der Verdrängungsströmung und der Zirkulationsströmung um die Schaufeln. Bei Zugrundelegung mathematisch gut zu behandelnder Schaufelprofile kann man mit Benutzung der Methoden der konformen Abbildung die Strömung durch die Schaufelkanäle als zweidimensionales Problem behandeln. Man erhält dann die Geschwindigkeitsverteilung im Kanal ebenso wie die Leistungsaufnahme des Rades. Die theoretische Untersuchung über den Einfluß der endlichen Schauzahl hat das Ergebnis, daß die Druckvolumenkurve zwar etwas unterhalb derjenigen, welche sich auf Grund der eindimensionalen Theorie ergibt, im übrigen aber ebenfalls geradlinig verläuft.

Indessen treten nun bei der wirklichen Flüssigkeit infolge ihrer Zähigkeit noch Verluste auf, welche der theoretisch geradlinigen Druckvolumenkurve einen wesentlich anderen, nämlich parabelartigen Charakter verleihen.

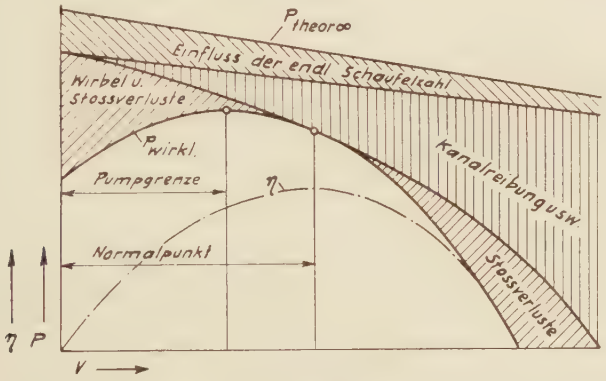

Fig. 3
Wirkliche Druckvolumenkurve bei rückwärts gekrümmten Schaufeln
Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Fördermenge

---

[2]) Sörensen: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1927 S. 89.

[3]) Schulz: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1928 S. 10.

[4]) Busemann: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1928 S. 372.

[5]) Spannhake: Neue Darstellung der Potentialströmung durch Kreiselräder für beliebige Schaufelform. Vorträge Aerodynamik und verwandte Gebiete (Aachen 1929). Verlag Springer. Berlin 1930.

Abgesehen von kleineren Verlusten wie Spaltverlust und dgl., welche durch die Konstruktion bedingt sind, hat man insbesondere zwischen der Kanalreibung, welche annähernd quadratisch mit der Fördermenge wächst, und den sogenannten Stoßverlusten zu unterscheiden. Die Stoßverluste sind Null bei der Fördermenge, für welche das Rad bei der betrachteten Drehzahl ausgelegt ist. Für größere und kleinere Fördermengen wachsen sie an. Diesem Punkt des stoßfreien Eintrittes entspricht auch ungefähr der maximale Wirkungsgrad.

Die Tatsache, daß die wirkliche Druckvolumenkurve ein Maximum besitzt, hat besondere Betriebseigenschaften derjenigen Maschinen zur Folge, welche mit kompressiblem Medium arbeiten. Sinkt z. B. der Verbrauch des an den Kompressor oder das Gebläse angeschlossenen Systems, so wird der Druck in der Leitung mit der Abnahme der Fördermenge zunehmen. Der Kompressor erzeugt automatisch einen der kleineren Fördermenge entsprechenden höheren Druck, aber nur so lange, bis er den bei der jeweiligen Drehzahl erreichbaren maximalen Druck erreicht hat. Bei weiterer Verminderung der Fördermenge sinkt der Enddruck des Kompressors unter den Druck in der Leitung, so daß ein Rückströmen durch die Maschine erfolgt, bis der Leitungsdruck dem Kompressorenddruck entspricht. Die Maschine arbeitet nunmehr für eine sehr kurze Zeit auf dem linken labilen Ast der Kurve. Dann stellt sie sich sofort sprunghaft auf die demselben Enddruck entsprechende größere Fördermenge des rechten stabilen Astes ein, worauf das Spiel von neuem beginnt. Dieses als „Pumpen" bezeichnete Verhalten des Kompressors ist mit starkem Geräusch verbunden, welches von kurzem Hämmern bei Leitungen kleinerer Kapazität bis zu explosionsartigem Getöse anwachsen kann. Durch das starke Geräusch wird schon ohne weiteres die Unwirtschaftlichkeit des Betriebes angezeigt. Außerdem können die starken Schwingungen Brüche in den Laufrädern des Kompressors oder den Leitungen verursachen.

Die Unterschreitung der Pumpgrenze muß also unter allen Umständen vermieden werden. Fördert der Kompressor gegen einen mit geringer werdender Fördermenge abnehmenden Druck, beispielsweise durch eine Rohrleitung oder eine konstante Öffnung, so kann die Verringerung der Fördermenge durch eine Drehzahländerung der Antriebsmaschine erreicht werden, sofern diese für einen Betrieb mit variabler Drehzahl gebaut ist. Bei unveränderlicher Drehzahl der Antriebsmaschine kann man die Fördermenge durch Drosselung im Saugstutzen des Kompressors vermindern, wobei der Wirkungsgrad schlechter ist als bei der Drehzahländerung. Diese beiden Verfahren sind jedoch nicht anwendbar, wenn der notwendige Enddruck des Kompressors für alle Fördermengen gleich ist, z. B. wenn das Gas durch eine Flüssigkeit

hindurchgedrückt werden soll. In diesem Fall führt neben einem intermittierenden Betrieb noch die Verstellung der hinter dem Laufrad zur weiteren Druckerhöhung angeordneten Diffusoren zum Ziel (Patent Brown Boveri). Alle diese Verfahren erfordern spezielle Vorrichtungen, welche besonders bei automatischer Regulierung eine Komplikation und Verteuerung der Anlage bedeuten. Sehr oft behilft man sich deshalb mit einem einfachen Ausblaseventil, welches bei Unterschreitung der Pumpgrenze von Hand oder automatisch geöffnet wird, so daß das überschüssige Gas ins Freie oder in die Saugleitung ausblasen kann. Diese zwar einfache und am häufigsten angewendete Methode ist natürlich sehr unwirtschaftlich.

2. Die Kármánsche Schlitzschaufelanordnung als Vorschlag zur Verbesserung der Druckvolumenkurve

Sämtliche Vorrichtungen zur Verhinderung des Pumpens würden überflüssig, sobald es gelänge, der P-V-Kurve einen solchen Charakter zu geben, daß überhaupt keine Pumpgrenze mehr vorhanden ist. Das Auftreten des Pumpens ist speziell in den mit kleiner werdender Fördermenge anwachsenden sogenannten Stoßverlusten begründet, da diese den Abfall des linken Astes der P-V-Kurve verursachen. Falls es gelänge, diese Verluste in einem solchen Maße zu verringern, daß das Maximum der Kennlinie bei der Fördermenge Null liegt, so wäre damit nicht nur die Erscheinung des Pumpens beseitigt, sondern auch der Wirkungsgrad des Kompressors im Bereich der kleineren Fördermengen erhöht, wodurch die Wirtschaftlichkeit weiterhin verbessert wäre.

Die Grundlage der Kármánschen Anordnung liegt nun in der Erkenntnis, daß die betrachteten Verluste keine Stoßverluste in gewöhnlichem Sinne sind, sondern dadurch hauptsächlich hervorgerufen werden, daß sich die Strömung von der Rückseite der Schaufeln ablöst. Denkt man sich innerhalb des Rades eine Schaufel, deren Richtung an jeder Stelle mit der aus der jeweiligen Meridian- und Umfangsgeschwindigkeit resultierenden Relativgeschwindigkeit übereinstimmt, so wird die ausgeführte gegenüber dieser „wirkungsfreien" Schaufel einen gewissen Anstellwinkel haben. Bei Überschreitung einer bestimmten Größe des Anstellwinkels tritt genau dem Flugzeugtragflügel entsprechend ein Abreißen der Strömung auf der Schaufelrückseite ein. Mit der Verhinderung der Ablösung würde der größte Teil der sogenannten Stoßverluste vermieden werden. Um Mittel zur Verhinderung der Ablösung finden zu können, muß man wissen, warum die Strömung abreißt. Die

Antwort hierauf gibt die Prandtlsche Grenzschichttheorie[6]), welche die die Bewegung zäher Flüssigkeiten darstellenden Navier-Stokesschen Gleichungen dadurch integrierbar macht, daß sie den gesamten Flüssigkeitsbereich in zwei spezielle Bereiche unterteilt, einen in unmittelbarer Nähe der Wand befindlichen und als „Grenzschicht" bezeichneten, in welchem die Zähigkeitskräfte vorherrschen und die Trägheitskräfte vernachlässigbar klein sind, und einen zweiten außerhalb dieser Grenzschicht befindlichen Bereich, in welchem die Zähigkeitskräfte gegenüber den Trägheitskräften vernachlässigt werden können, d. h. eine reine Potentialströmung angenommen werden kann.

Die nähere Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung hat das Ergebnis, daß bei verzögerter Strömung die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht unter Umständen negativ werden, d. h. eine Rückströmung längs der Wand eintreten kann. Durch diese Rückströmung wird die Ablösung eingeleitet. Die Theorie läßt gleichzeitig die Mittel zur Verhinderung der Ablösung erkennen. Diese bestehen darin, daß entweder die sonst mit der von der Flüssigkeit zurückgelegten Weglänge anwachsende Grenzschichtdicke durch direkte Absaugung unterhalb eines gewissen Betrages gehalten wird[7]), oder darin, daß man der Grenzschicht vor der Ablösungsstelle einen neuen Impuls durch Zuführen von Flüssigkeit größerer Geschwindigkeit verleiht. Die Grenzschichtabsaugung kommt für Kreiselräder aus konstruktiven Rücksichten nicht in Frage. Dagegen läßt sich die Zuführung neuer Energie zur Grenzschicht mit einem ganz minimalen Aufwand auch in konstruktiver Hinsicht einfach dadurch bewerkstelligen, daß man die einzelnen Schaufeln mit Schlitzen versieht, durch welche ein Bruchteil der geförderten Flüssigkeit infolge der Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite der Schaufel mit größerer Geschwindigkeit hindurchströmt und die verlangsamte Strömung innerhalb der Grenzschicht von neuem anfacht.

Da die gewöhnlichen auf Grund eindimensionaler Betrachtungsweise gewonnenen Eulerschen Turbinengleichungen ebenso wie die Spannhakesche zweidimensionale Theorie keine Aussage über den Ablösungspunkt und die notwendige Schlitzbreite ergeben, muß man versuchen, die Größenordnung dieser Werte auf Grund der Grenzschichttheorie zu ermitteln.

---

[6]) Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des 3. intern. Mathematikerkongresses 1904 (Heidelberg) S. 484. Verlag B. G. Teubner. Leipzig 1905.

[7]) Ackeret: Grenzschichtabsaugung. Zeitschrift des VdI 1926 S. 1153.

3. Die Prandtl-Kármánsche Grenzschichttheorie

Rein formal beruht die Prandtlsche Grenzschichttheorie im wesentlichen darauf, daß in der exakten Differentialgleichung für reibungsbehaftete Flüssigkeit

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

das Glied

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in der Nähe der Wand vernachlässigt werden und statt des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ der totale gesetzt werden kann, weil der Druck in der Grenzschicht längs y ungefähr konstant ist. Die so vereinfachte Differentialgleichung wird integrierbar mit Hilfe eines Reihenansatzes, dessen einzelne Koeffizienten durch eine Reihe gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können[8)–10)].

Die Kármánsche Weiterentwicklung der Grenzschichttheorie[11)] besteht darin, daß man aus der einmal integrierten Grenzschichtgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung der Grenzschichtdicke δ erhält, wenn man für die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Grenzschicht einen plausiblen Näherungsansatz macht. Ein solcher Näherungsansatz ergibt sich auf Grund der bei der Messung des Druckabfalles in Rohren gewonnenen experimentellen Ergebnisse. Die Kármánsche Theorie ist von besonderer Wichtigkeit für die Untersuchung der Grenzschicht bei turbulenter Strömung. Bezüglich Einzelheiten der Theorien wird auf die Originalarbeiten verwiesen.

4. Die laminare Wandschicht bei turbulenter Strömung.

Die turbulente Strömung betreffend beschränkt sich die Kármánsche Theorie auf eine Strömung mit unveränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht. Da in diesem Falle eine Ablösung von der

8) Blasius: Dissertation. Göttingen 1907.
9) Boltze: Dissertation. Göttingen 1908.
10) Hiemenz: Dissertation. Göttingen 1911.
11) v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1921 S. 233.

Wand nicht stattfindet, so macht sich die vereinfachende Annahme eines $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes für den ganzen Bereich der Grenzschicht bis in unmittelbare Wandnähe [1]) nicht weiter in den Ergebnissen der Theorie bemerkbar. Es ist indessen zu bemerken, daß das $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz in unmittelbarer Nähe der Wand seine Gültigkeit verlieren muß. Denn mit

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{5}$$

ergäbe sich an der Wand wegen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \infty$$

eine unendlich große Schubspannung τ_0. In Wirklichkeit gilt naturgemäß das Gesetz der Laminarreibung

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{6}$$

weil wegen $u = 0$ und $v = 0$ für $y = 0$ an der Wand durch Impulskonvektion keine Schubspannung übertragen werden kann. Der wirkliche Wert $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ ist aus der bereits bekannten Schubspannung τ_0 zu berechnen.

Jedenfalls sieht man hieraus, daß die turbulente Grenzschicht nicht einheitlich sein kann, sondern daß eine zweite noch schmalere Schicht existieren muß, welche die Gesetze der Laminarreibung befolgt. Diese soll im folgenden als laminare Wandschicht bezeichnet werden.

Für die Berechnung des Impulsverlustes in der Grenzschicht ist die Berücksichtigung der laminaren Wandschicht nur von untergeordneter Bedeutung, wie man leicht aus der Fig. 5 erkennt. Der Gesamtimpuls der Grenzschicht wird nicht stark variieren, ob nun mit einer die Wand tangierenden Geschwindigkeitsverteilungsfunktion gerechnet wird oder einer solchen, welche die Wand unter einem bestimmten Winkel schneidet, sofern die beiden Kurven im überwiegenden Teil des Ausdehnungsbereiches der Grenzschicht übereinstimmen.

Da sich v. Kármán auf die Ermittelung des Reibungswiderstandes der Wand beschränkt, wozu nur die Kenntnis des Gesamtimpulses der Grenzschicht nötig ist, so ist die von ihm gemachte vereinfachende

[1]) Siehe Anmerkung 11 v. Kármán: Gl. (16) S. 243.

Annahme zulässig. Das Problem der Ablösung bei stark verzögerter Strömung ist jedoch nur lösbar unter der Bedingung, daß man der physikalisch bedingten Forderung einer laminaren Wandschicht auch in der theoretischen Entwicklung Rechnung trägt. Es entsteht nun die Frage nach der Ausdehnung der laminaren Wandschicht.

5. Experimentelle Untersuchungen der turbulenten Grenzschicht

Einen wertvollen Beitrag zu diesem Problem liefert die Arbeit[12]) von van der Hegge Zijnen über direkte Geschwindigkeitsmessungen, welche innerhalb der Grenzschicht mit Hilfe eines Thomsonschen Hitzdrahtanemometers ausgeführt worden sind. Die Versuche liefern eine Bestätigung für die prinzipielle Richtigkeit des theoretisch abgeleiteten $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes, wenigstens in dem Bereich der der Untersuchung noch zugänglichen Reynoldschen Zahlen. Das erste Ergebnis der Untersuchung, daß bei einer gut zugeschärften Platte auch bei turbulenter Strömung am vorderen Plattenende für eine kurze Strecke noch eine vollständig laminare Grenzschicht vorhanden ist, hat für uns weiter keine Bedeutung, da bei Kreiselrädern die Schaufelspitzen stets so wenig zugeschärft sind, daß man ohne weiteres den Beginn der turbulenten Grenzschicht bereits von der Schaufelspitze ab rechnen kann. Das zweite wichtige Ergebnis betrifft die Ausdehnung der laminaren Wandschicht innerhalb der turbulenten Grenzschichtdicke. In der Fig. 4 sind die in den Zijnenschen Versuchen ermittelten Geschwindigkeiten in Abhängigkeit des Wandabstandes aufgetragen[11]). Man erkennt aus dem Kurvenblatt, daß der Bereich, in welchem das $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz in der Nähe der Wand nicht mehr gilt, ziemlich gut durch die Gerade Z—Z abgegrenzt werden kann. Da Z—Z bei gleicher Wahl des logarithmischen Maßstabes für beide Koordinaten um 135° gegen die $\log y$-Axe geneigt ist, kann man die Gleichung der Gerade schreiben in der Form

$$\log u_1 = \log \text{Const} - \log \delta_1 \tag{7}$$

oder

$$u_1 \, \delta_1 = \text{Const} \tag{8}$$

[12]) Van der Hegge Zijnen: Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Dissertation. Delft 1924.

[11]) Siehe Anmerkung 12 van der Hegge Zijnen: Fig. 8 S. 28.

Mit Einführung der kinematischen Zähigkeit erhält man die dimensionslose Zahl

$$\frac{u_1 \delta_1}{\nu} = Z, \tag{9}$$

welche im folgenden als Zijnensche Zahl bezeichnet werden soll. Durch diese Zahl ist die wirkliche, experimentell ermittelte Ausdehnung der laminaren Wandschicht festgelegt.

Man könnte auch einen ideellen Bereich dieser Schicht dadurch definieren, daß man sagt, die Laminarschicht geht dort in die turbulente Grenzschicht über, wo die Gerade, welche mit der der wirklichen Schubspannung an der Wand entsprechenden Neigung gezogen ist, die $\frac{1}{7}$-Potenzkurve schneidet (Fig. 5).

Der Wert der Schubspannung ergibt sich aus der Geradengleichung einmal zu

$$\tau_0 = \mu \frac{u}{y} \tag{10}$$

und zum anderen aus dem $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz in der Form [III])

$$u = 8{,}7 \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{11}$$

zu

$$\tau_0 = \varrho \frac{u^{\frac{7}{4}}}{8{,}7^{\frac{7}{4}}} \left(\frac{\nu}{y}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{12}$$

Für den Schnittpunkt mit den Koordinaten (u_2, δ_2) folgt also die Beziehung

$$\mu \frac{u_2}{\delta_2} = \frac{u_2^{\frac{7}{4}} \varrho}{8{,}7^{\frac{7}{4}}} \left(\frac{\nu}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{13}$$

oder

$$\frac{u_2 \delta_2}{\nu} = 8{,}7^{\frac{7}{3}} = 157{,}3 = C \tag{14}$$

Die diesem Wert der Laminarschichtdicke entsprechende Gerade ist in der Fig. 4 mit $C-C$ bezeichnet. Man sieht, daß sie nicht mit den ge-

---

[III]) Siehe Anmerkung 11 v. Kármán: Gl. (14a) S. 242.

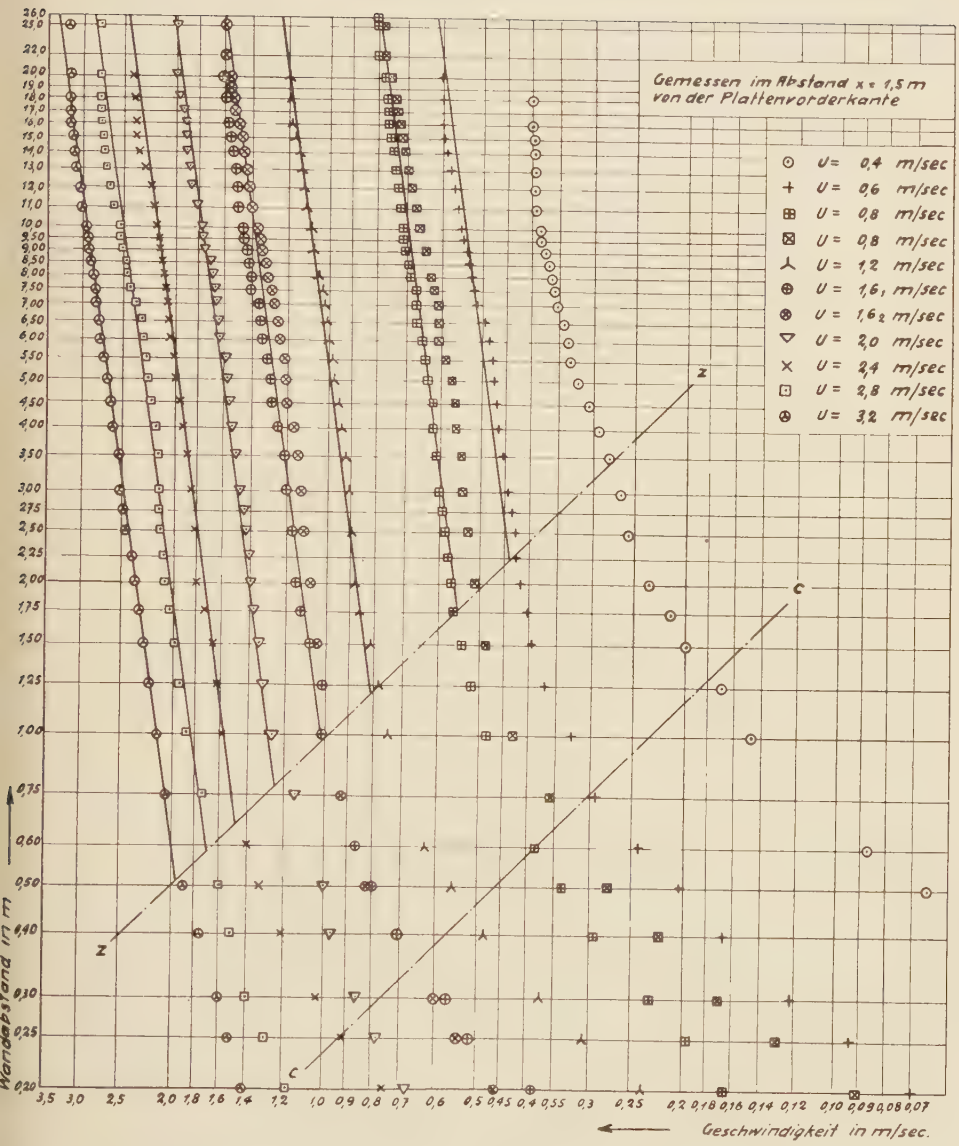

Fig. 4
Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der turbulent. Grenzschicht bei verschiedenen Reynoldschen Zahlen
(nach van der Hegge Zijnen)

messenen Werten übereinstimmt. In Wirklichkeit könnte ein Knick in der Kurve der Geschwindigkeitsverteilung, wie er durch die obige Annahme bedingt ist, aus Stetigkeitsgründen auch niemals eintreten. Eine

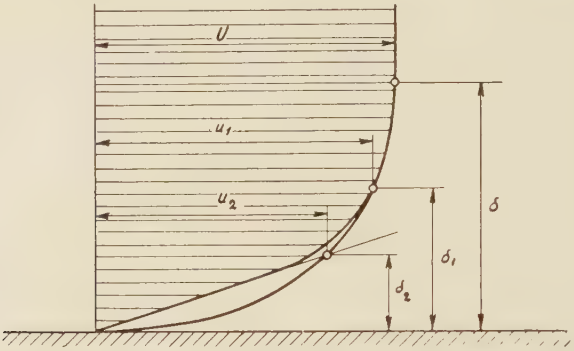

Fig. 5
Bereich der laminaren Wandschicht
bei turbulenter Strömung

gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse erhält man, wenn man die Geschwindigkeit innerhalb der laminaren Wandschicht als Parabel von der Form

$$u = A\left(\frac{k\,y}{B} - \left(\frac{y}{B}\right)^k\right) \tag{15}$$

ansetzt, wobei der Exponent k der experimentell ermittelten Zahl Z entsprechend gewählt werden soll und welche außerdem folgenden Grenzbedingungen genügt:

1. Der Geschwindigkeitsgradient an der Wand soll der wirklichen Schubspannung entsprechend gleich $\frac{\tau_0}{\mu}$ sein.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} \qquad \text{für } y = 0 \tag{16}$$

2. Für $y = \delta_1$ soll der Geschwindigkeitsgradient mit demjenigen der $\frac{1}{7}$-Potenzkurve übereinstimmen.

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{5}$$

(17) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{7}\frac{U}{y}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

also

(18) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \qquad \text{für } y = \delta_1$$

3. Außerdem sollen für $y = \delta_1$ natürlich die sich aus beiden Kurven ergebenden Geschwindigkeiten übereinstimmen. D. h.

(19) $$u = U\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \qquad \text{für } y = \delta_1$$

Aus der Parabelgleichung

(15) $$u = A\left(\frac{k\,y}{B} - \left(\frac{y}{B}\right)^{k}\right)$$

in welcher die Größen A und B noch aus den Grenzbedingungen bestimmt werden müssen, ergibt sich der Geschwindigkeitsgradient in der y-Richtung zu

(20) $$\frac{\partial u}{\partial y} = A\left(\frac{k}{B} - \frac{k}{B}\left(\frac{y}{B}\right)^{k-1}\right)$$

Nun entspricht der Grenzbedingung 2 die Gleichung

(21) $$\frac{1}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = A\left(\frac{k}{B} - \frac{k}{B}\left(\frac{\delta_1}{B}\right)^{k-1}\right)$$

und der Grenzbedingung 3

(22) $$U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = A\left(\frac{k\,\delta_1}{B} - \left(\frac{\delta_1}{B}\right)^{k}\right)$$

woraus sich nach Elimination von A der Wert B zu

(23) $$B = \delta_1\left(\frac{7k-1}{6k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

berechnet.

Grenzbedingung 1 ergibt

(24) $$\frac{\tau_0}{\mu} = \frac{A}{B}k$$

oder

(25) $$A = \delta_1\frac{\tau_0}{\mu}\frac{1}{k}\left(\frac{7k-1}{6k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Durch Einsetzen der Werte von A und B formt sich die Parabelgleichung (15) um in

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y \left(1 - \frac{6}{7k-1} \left(\frac{y}{\delta_1}\right)^{k-1}\right) \tag{26}$$

Die turbulente Geschwindigkeitsverteilung hat die Form

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{5}$$

Für $y = \delta_1$ sind beide Geschwindigkeiten gleich. Hieraus folgt

$$U \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \frac{\tau_0}{\mu} \delta_1 \left(1 - \frac{6}{7k-1} \left(\frac{\delta_1}{\delta_1}\right)^{k-1}\right) \tag{27}$$

oder

$$\delta_1 = \left(\frac{\mu U}{\tau_0}\right)^{\frac{7}{6}} \delta^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{7k-1}{7k-7}\right)^{\frac{7}{6}} \tag{28}$$

Die Geschwindigkeit selbst ist für $y = \delta_1$

$$u_1 = U \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = U^{\frac{7}{6}} \left(\frac{\mu}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{6}} \delta^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{7k-1}{7k-7}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{29}$$

Nunmehr kann man die Zijnensche Zahl bilden und erhält

$$\frac{u_1 \delta_1}{\nu} = U^{\frac{7}{3}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{\mu}{\tau_0}\right)^{\frac{4}{3}} \delta^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{7k-1}{7k-7}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{30}$$

bzw. mit

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \text{IV)} \tag{31}$$

$$Z = \frac{u_1 \delta_1}{\nu} = \left(\frac{7k-1}{0{,}0225\,(7k-7)}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{32}$$

Der Exponent k als Funktion der Zijnenschen Zahl ist also

$$k = \frac{0{,}0225 \cdot 7 \cdot Z^{\frac{3}{4}} - 1}{0{,}0225 \cdot 7 \cdot Z^{\frac{3}{4}} - 7} \tag{33}$$

Aus den Zijnenschen Versuchen ergibt sich die Zahl $Z = 650$, mithin der Exponent der Parabel $k = 1{,}455$.

IV) Siehe Anmerkung v. Kármán: Gl. (17) S. 243.

Die Näherungsgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der laminaren Wandschicht bei turbulenter Strömung stellt sich infolgedessen für Strömung mit konstanter Geschwindigkeit U außerhalb der Grenzschicht dar in der Form

$$u_l = \frac{\tau_0}{\mu} y \left(1 - 0{,}653 \left(\frac{y}{\delta_1}\right)^{0{,}455}\right), \tag{34}$$

worin

$$\delta_1 = 11{,}84 \left(\frac{\mu U}{\tau_0}\right)^{\frac{7}{6}} \delta^{-\frac{1}{6}} \tag{35}$$

τ_0 und δ lassen sich hierbei aus den alten Beziehungen des $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes berechnen, also

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{31}$$

und

$$\delta = 0{,}37 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} \text{ V)} \tag{36}$$

Eine weitere experimentelle Nachprüfung des $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes ist von Dönch bei der Untersuchung der Luftströmung durch divergente, parallele und konvergente Kanäle vorgenommen worden[13]). Dönch gibt an, daß das Geschwindigkeitsprofil durch ein $\frac{1}{8}$-Potenzgesetz noch besser dargestellt würde. Rechnet man hieraus nun umgekehrt entsprechend der von v. Kármán durchgeführten Dimensionsbetrachtung[11]) das Widerstandsgesetz der Rohrreibung aus, so erhält man das Ergebnis, daß der Widerstandsbeiwert der 4,5ten Wurzel aus der Reynoldschen Zahl umgekehrt proportional ist, während sich aus den Blasiusschen Messungen[14]) die 4te Wurzel ergab.

Diese Unstimmigkeit sollte jedoch nicht Veranlassung geben, den Ansatz eines einfachen Potenzgesetzes überhaupt zu verwerfen, besonders wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß bei einer ganz minimalen

---

V) Siehe Anmerkung 11 v. Kármán: Gl. (18) S. 243.

13) Dönch: Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. VdI-Forschungsheft Nr. 282.

14) Blasius: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. VdI-Forschungsheft Nr. 131.

Verschiebung der Wand dieselben Funktionswerte dem $\frac{1}{8}$-Potenzgesetz genügen, welche vorher exakt einem $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz entsprochen haben. Dasselbe gilt auch für noch kleinere Potenzen. Da die ganze folgende Rechnung infolge der Notwendigkeit von Näherungsansätzen auch nur Näherungswerte ergeben kann, soll auch der experimentell ziemlich gut bestätigte Potenzansatz beibehalten werden, und zwar die Potenz $\frac{1}{7}$, um in Übereinstimmung mit dem Blasiusschen Widerstandsgesetz zu bleiben. Denn die Meßungenauigkeiten sind größer als die Abweichungen, welche sich durch Annahme eines anderen als des $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes ergeben.

6. Übertragung auf turbulente Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht

Dönch hat auch bei Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit im reibungsfreien Bereich die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht gemessen und kommt zu dem Ergebnis, daß sie gut durch ein $\frac{1}{8}$-Potenzgesetz dargestellt werden können. Damit wird wenigstens für kleine Geschwindigkeitsänderungen der naheliegende Gedanke experimentell bestätigt, daß sich das Potenzgesetz der turbulenten Grenzschicht auch auf beschleunigte oder verzögerte Strömungen übertragen läßt. Da die $\frac{1}{7}$-Potenz die Meßergebnisse ebenfalls wiedergibt, wird man diese der Einheitlichkeit wegen auch für die Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht ansetzen. Hierdurch wird es möglich, eine neue Bestimmungsgleichung für den Wert der Grenzschichtdicke zu entwickeln.

7. Die Integralbedingung bei turbulenter Strömung mit veränderlicher Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht

Man hat nämlich unter solchen Voraussetzungen wieder einen plausiblen Näherungsansatz für die Verteilung der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht. Die Kármánsche Integralbedingung [VI]) ergibt auch in diesem Falle eine integrierbare Differentialgleichung, aus welcher sich die Grenzschichtdicke δ direkt als Funktion des Strömungsweges x ermitteln läßt. Für stationäre Strömung entfällt das Glied, welches die Variation nach der Zeit enthält, so daß die Integralbedingung nunmehr lautet

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u^2 dy + v U + \delta \frac{dp}{dx} + \tau_0 = 0 \tag{37}$$

Hierin ist

$$v = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\, dy \quad \text{infolge der Kontinuitätsbedingung,}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho U U' \quad \text{nach der Bernoullischen Energiegleichung,}$$

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

wegen Annahme des $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes, so daß sich die Gleichung (37) umformt in

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta U^2 dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\, dy - U U' \delta = -0{,}0225\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{38}$$

Wegen

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{5}$$

VI) Siehe Anmerkung 11 v. Kármán: Gl. (5) S. 235.

ist der Wert der Integrale wie bei der Strömung mit konstanter Geschwindigkeit im reibungsfreien Bereich

$$\int_0^\delta u\,dy = \frac{7}{8}\,U\delta \qquad \text{und} \tag{39}$$

$$\int_0^\delta u^2 dy = \frac{7}{9}\,U^2\delta \tag{40}$$

Dagegen berechnen sich die Ableitungen nach x wegen der Veränderlichkeit von U zu

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\;dy = \frac{7}{8}\,(U'\delta + U\delta') \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^2 dy = \frac{7}{9}\,(2\,UU'\delta + U^2\delta') \tag{42}$$

Man erhält also

$$\frac{14}{9}\,UU'\delta + \frac{7}{9}\,U^2\delta' - \frac{7}{8}\,UU'\delta - \frac{7}{8}\,U^2\delta' - UU'\delta = -\,0{,}0225\,U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{43}$$

oder

$$-\frac{23}{72}\,U'\delta - \frac{7}{72}\,U\delta' = -\,0{,}0225\,U\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{44}$$

oder

$$\delta' + \frac{23}{7}\frac{U'}{U}\delta - \frac{72\cdot 0{,}0225}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{4}} = 0 \tag{45}$$

Diese Bernoullische Differentialgleichung kann man mit der Substitution

$$\delta^{\frac{5}{4}} = \xi; \quad \delta^{-\frac{1}{4}} = \xi^{-\frac{1}{5}}; \quad \delta' = \frac{4}{5}\,\xi^{-\frac{1}{5}}\,\xi' \tag{46}$$

in die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{5}{4}\frac{23}{7}\frac{U'}{U}\,\xi - \frac{5}{4}\,\frac{72\cdot 0{,}0225}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} = 0 \tag{47}$$

umformen, deren allgemeine Lösung lautet

$$\xi = \frac{K}{e^{\int_0^x \varphi(x)\,dx}} - \frac{1}{e^{\int_0^x \varphi(x)\,dx}} \int_0^x \psi(x)\, e^{\int_0^x \varphi(x)\,dx}\, dx \tag{48}$$

wobei in unserm Falle

$$\varphi(x) = \frac{5}{4}\,\frac{23}{7}\,\frac{U'}{U} = 4{,}11\,\frac{U'}{U} \tag{49}$$

und

$$\psi(x) = -\frac{5}{4}\,\frac{72 \cdot 0{,}0225}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} = -0{,}289\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{50}$$

Die Konstante ist

$$K = 0 \quad \text{wegen } \xi = 0 \quad \text{für } x = 0 \tag{51}$$

Da ferner

$$e^{\int_0^x \varphi(x)\,dx} = e^{4{,}11\int_0^x \frac{U'}{U}\,dx} = e^{4{,}11\int_{U_{x_0}}^{U} \frac{dU}{U}} = \left(\frac{U}{U_{x_0}}\right)^{4{,}11} \tag{52}$$

so ergibt sich als Resultat der Wert der Grenzschichtdicke

$$\delta = \left(0{,}289\,\frac{\nu^{\frac{1}{4}}}{U^{4{,}11}} \int_0^x \frac{U^{4{,}11}}{U^{\frac{1}{4}}}\,dx\right)^{\frac{4}{5}} \tag{53}$$

Für konstante Geschwindigkeit U erhält man aus der Gleichung (53) wieder die von v. Kármán abgeleitete Beziehung

$$\delta = 0{,}37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} \tag{36}$$

8. Die Berechnung des Ablösungspunktes

Bei der Ableitung der obigen Beziehung ist genau wie bei der Berechnung der turbulenten Grenzschichtdicke an der ebenen Platte auf die Tatsache keine Rücksicht genommen worden, daß das $\frac{1}{7}$-Potenz-

gesetz sich in Wirklichkeit nicht ganz bis zum Werte $y = 0$ erstreckt. Jedoch sind die Abweichungen, welche sich hieraus für die Berechnung der Impulsgrößen ergeben, so gering, daß sie eine Komplizierung der Formel für die Grenzschichtdicke durch Einsetzen der wirklichen Geschwindigkeitswerte für den laminaren Bereich der Grenzschicht nicht rechtfertigen würden.

Die Berechnung des Ablösungspunktes verlangt indessen einen Ansatz, welcher eine Veränderung des Geschwindigkeitsprofiles innerhalb der laminaren Wandschicht bis zu einem im Punkte $y = 0$ senkrecht zur Wand stehenden Geschwindigkeitsgradienten zuläßt. Es soll daher die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der laminaren Wandschicht bei turbulenter Strömung mit variabler Geschwindigkeit im reibungsfreien Bereich als Parabel dritter Ordnung angesetzt werden in der Form

$$u_l = a y + b y^2 + c y^3 \tag{54}$$

wobei sich die Koeffizienten aus den folgenden Grenzbedingungen bestimmen:

1. Für $y = \delta_1$ stimmt die Geschwindigkeit u_l mit dem aus dem $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz zu berechnenden u-Wert überein.

2. Ebenso ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach y für $y = \delta_1$ gleich demjenigen, welcher sich aus dem $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz bestimmt.

3. Ist für $y = 0$: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U U'}{\nu}$. **Diese Beziehung folgt aus** der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht [VII])

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{55}$$

wegen $u = 0 \quad v = 0$ für $y = 0$. Also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu \varrho} \frac{dp}{dx} = -\frac{U U'}{\nu} \tag{56}$$

Die Gleichungen

$$u_l = a y + b y^2 + c y^3 \tag{54}$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial y} = a + 2 b y + 3 c y^2 \tag{57}$$

[VII]) Siehe Anmerkung 11 v. Kármán: Gl. (4c) S. 235.

(58) $$\frac{\delta^2 u_l}{\delta y^2} = \quad 2b \quad + 6cy$$

ergeben also mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen

(59) $$U\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = a\,\delta_1 + b\,\delta_1^2 + c\,\delta_1^3$$

(60) $$\frac{1}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = a \quad + b\,\delta_1 \quad + c\,\delta_1^2$$

(61) $$-\frac{UU'}{\nu} = 2b$$

Hieraus erhält man den Wert der Koeffizienten zu

(62) $$b = -\frac{UU'}{2\nu}$$

(63) $$c = \frac{UU'}{4\nu}\frac{1}{\delta_1} - \frac{3}{7}\frac{U}{\delta_1^3}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

und

(63) $$a = \frac{10}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} + \frac{UU'}{4\nu}\delta_1$$

welche in die Gleichung (54) eingesetzt

(65) $$u_l = \left(\frac{10}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} + \frac{UU'}{4\nu}\delta_1\right)y - \frac{UU'}{2\nu}y^2$$
$$+\left(\frac{UU'}{4\nu\,\delta_1} + \frac{3}{7}\frac{U}{\delta_1^3}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right)y^3$$

ergeben. Eine Ablösung der Strömung von der Wand tritt offenbar dann ein, wenn $a = 0$ ist. Man erhält demnach als Ablösungsbedingung die Beziehung:

(66) $$\frac{10}{7}\frac{U}{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} + \frac{UU'}{4\nu}\delta_1 = 0$$

oder

(67) $$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{Ablös.}} = -\frac{40}{7}\frac{\nu}{\delta_1^2}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Diese Gleichung kann man noch etwas umformen. Man erhält nämlich mit

$$\frac{u_1 \delta_1}{\nu} = Z \tag{9}$$

und

$$u_1 = U \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{29}$$

den Wert

$$\delta_1 = \left(\frac{\nu Z}{U}\right)^{\frac{7}{8}} \delta^{\frac{1}{8}} \tag{68}$$

was in (67) eingesetzt die Bedingung

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{Ablös.}} = -\frac{40}{7} \frac{U}{\delta Z^{\frac{1}{8}}} \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{69}$$

ergibt. Da die Zijnensche Zahl $Z = 650$ ist, so erhält man schließlich

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{Ablös.}} = -\frac{1}{6500} \frac{U}{\delta} \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{70}$$

9. Beispiele zum Beweise der Übereinstimmung mit Versuchswerten

Bevor die vorstehende Ablösungsbedingung zur Berechnung des Ablösungspunktes in Kreiselradkanälen benutzt wird, soll an den Beispielen der turbulenten Strömung durch Diffusoren und um Zylinder gezeigt werden, daß die Größenordnung der aus der Ablösungsbedingung folgenden Ergebnisse mit der Erfahrung gut übereinstimmt.

a) Kritischer Öffnungswinkel bei turbulenter Strömung durch gerade Diffusoren

Es sei die Strömung durch ein zylindrisches Rohr mit einem konischen Ansatzstück betrachtet. Die Änderung der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht, welche in erster Annäherung gleich der Ände-

rung der mittleren Geschwindigkeit gesetzt werde, berechnet sich für den Querschnitt S, an welchem das konische Rohr ansetzt, zu

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_S = -4\frac{U}{D}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{71}$$

wobei α den ganzen Konuswinkel bedeutet. Man erhält also

$$-4\frac{U}{D}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{6500}\frac{U}{\delta}\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{72}$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = \frac{1}{26000}\frac{D}{\delta}\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{73}$$

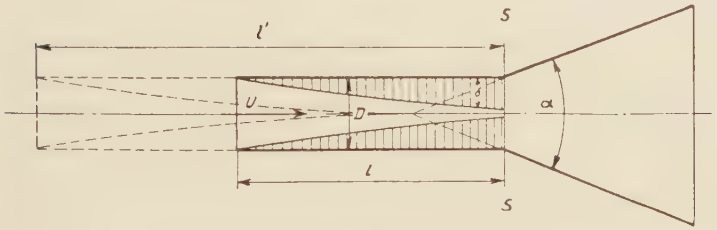

Fig. 6
Strömung durch einen geraden Diffusor

Im Falle einer genügend langen zylindrischen Anlaufstrecke reicht die Grenzschicht bis in die Mitte des Rohres. Es ist dann $\delta = \frac{D}{2}$ und daher

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = \frac{1}{13000}\left(\frac{UD}{2\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{74}$$

Der Tangens des halben Konuswinkels ergibt sich also der $\frac{5}{8}$-Potenz derjenigen Reynoldschen Zahl proportional, welche aus der mittleren Geschwindigkeit U und dem Radius $\frac{D}{2}$ am Eintritt in den Diffusor gebildet ist.

Es seien beispielsweise folgende Verhältnisse vorgegeben:

$D = 0{,}10\,\text{m}$ $\quad U = 20\,\text{m/sec}$ $\quad \nu = 0{,}15\,\text{cm}^2/\text{sec}$ (Luft)

Die Reynoldsche Zahl berechnet sich dann zu

$$\frac{UD}{2\nu} = \frac{20 \cdot 0{,}10 \cdot 10000}{2 \cdot 0{,}15} = 66600$$

Ferner ist

$$\left(\frac{UD}{2\nu}\right)^{\frac{5}{8}} = 1035$$

und damit

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = \frac{1035}{13000} = 0{,}0795$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = 4^{0}\,30'$$

d. h. es ist der

Ablösungswinkel $\alpha = 9^{0}$.

Bei ebener Strömung, d. h. für einen durch parallele Wände begrenzten Kanal mit anschließender konischer Erweiterung in nur einer Axe erhält man ein qualitativ ähnliches Ergebnis. Die Geschwindigkeitsänderung ist in diesem Falle nur halb so groß als bei axensymmetrischer Strömung

(75) $$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{S} = -2\,\frac{U}{D}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

wobei

U = mittlere Geschwindigkeit am Eintritt in den Diffusor

D = Abstand der parallelen Kanalwände.

Hieraus folgt

(76) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = \frac{1}{6500}\left(\frac{UD}{2\nu}\right)^{\frac{5}{8}}$$

Es seien die Zahlenwerte des obigen Beispieles beibehalten, also

$D = 0{,}10$ m $\qquad U = 20$ m/sec $\qquad \nu = 0{,}15$ cm²/sec

Dann ist wiederum

$$\left(\frac{UD}{2\nu}\right)^{\frac{5}{8}} = 1035$$

Dagegen

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = \frac{1035}{6500} = 0{,}159$$

oder

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\text{Ablös.}} = 9^0$$

D. h. bei ebener Strömung ist unter denselben Verhältnissen der

Ablösungswinkel $\alpha = 18^0$.

Das allgemeine Ergebnis der auf Diffusoren angewandten Ablösungsbedingung (70) ist also folgendes: Es kann von einem für alle Verhältnisse gültigen kritischen Öffnungswinkel des Diffusors nicht gesprochen werden. Vielmehr ist die Größe der zulässigen Erweiterung einmal abhängig von der Reynoldschen Zahl am Anfang der Erweiterung und zum andern von der Art des Einbaues des Diffusors. Insbesondere ist es von Wichtigkeit, ob ein hydrodynamisch ausgebildeter Zustand vorliegt oder ob es sich um eine relativ kurze Anlaufstrecke handelt, bei welcher die Grenzschicht noch nicht die Mitte des Rohres erreicht hat. Bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand ist bei sonst gleicher Reynoldscher Zahl der zulässige Erweiterungswinkel ein Minimum.

b) Ablösungspunkt bei turbulenter Strömung um einen Zylinder

In die allgemeine Ablösungsbedingung:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{Ablös.}} = -\frac{1}{6500}\frac{U}{\delta}\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{70}$$

sind die Werte der Geschwindigkeit U und der Grenzschichtdicke als Funktionen der Länge x oder noch besser des Zylinderwinkels einzusetzen, um den Punkt der Ablösung zu erhalten. Setzt man der Einfachheit halber, da es sich nur um die Nachprüfung der Größenordnung des Ergebnisses handelt, für die Geschwindigkeit den Wert ein, welcher sich für die Potentialströmung ergibt

$$U = 2U_0 \sin \tag{77}$$

so erhält man

$$\frac{dU}{d\Theta} = 2U_0 \cos \Theta \tag{78}$$

und für die Grenzschichtdicke, welche sich nach Abschnitt 7 zu

$$\delta = \left(0{,}289 \, \frac{\nu^{\frac{1}{4}}}{U^{4{,}11}} \int_0^x \frac{U^{4{,}11}}{U^{\frac{1}{4}}} \, dx \right)^{\frac{4}{5}} \tag{53}$$

ergeben hat

$$\delta = \left(0{,}289 \, \frac{\nu^{\frac{1}{4}}}{(2 U_0 \sin \Theta)^{4{,}11}} \int_0^x (2 U_0 \sin \Theta)^{3{,}86} \, dx \right)^{\frac{4}{5}} \tag{79}$$

oder wegen

$$dx = r_0 \, d\Theta \quad (r_0 = \text{Zylinderradius}) \tag{80}$$

$$\delta = \left(0{,}289 \left(\frac{\nu}{2 U_0 r_0} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{r_0^{\frac{1}{4}}}{\sin^{4{,}11} \Theta} \int_0^\Theta \sin^{3{,}86} \Theta \, d\Theta \right)^{\frac{4}{5}} \tag{81}$$

Es ist also

$$\delta^{\frac{3}{8}} = 0{,}289^{\frac{3}{10}} \left(\frac{\nu}{2 U_0 r_0} \right)^{\frac{3}{40}} r_0^{\frac{3}{8}} \left(\frac{\int_0^\Theta \sin^{3{,}86} \Theta \, d\Theta}{\sin^{4{,}11} \Theta} \right)^{\frac{3}{10}} \tag{82}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{r_0} \frac{dU}{d\Theta} = \frac{2 U_0 \cos \Theta}{r_0} \tag{83}$$

und

$$U^{\frac{13}{8}} = (2 U_0 \sin \Theta)^{\frac{13}{8}} \tag{84}$$

welche Werte in die Ablösungsbedingung eingesetzt, die Gleichung

$$2 U_0 \cos \Theta = - \frac{r_0 (2 U_0 \sin \Theta)^{\frac{13}{8}} (2 U_0 r_0)^{\frac{3}{40}} \left(\sin^{4{,}11} \Theta \right)^{\frac{3}{10}}}{6500 \, \nu^{\frac{5}{8}} \, 0{,}289^{\frac{3}{10}} \, \nu^{\frac{3}{40}} \, r_0^{\frac{3}{8}} \left(\int_0^\Theta \sin^{3{,}86} \Theta \, d\Theta \right)^{\frac{3}{10}}} \tag{85}$$

ergeben. Hierin kann man noch einiges kürzen und erhält

$$-1 = \frac{2^{\frac{7}{10}}}{6500 \cdot 0{,}289^{\frac{3}{10}}} \left(\frac{U_0 r_0}{\nu} \right)^{\frac{7}{10}} \frac{\sin^{\frac{5}{2}} \Theta \left(\sin^{4{,}11} \Theta \right)^{\frac{3}{10}} \operatorname{tg} \Theta}{\left(\int_0^\Theta \sin^{3{,}86} \Theta \, d\Theta \right)^{\frac{3}{10}}} \tag{86}$$

Man sieht hieraus, daß der Ablösungswinkel nur zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegen kann, da bei den in Frage kommenden ersten und zweiten Quadranten nur im zweiten das Produkt aus Sinus und Tangens negativ ist. Der dritte und vierte Quadrant fallen außer Betracht, da die Ablösung an einem Punkte $\Theta > \pi$ keinen physikalischen Sinn hat. Nunmehr formt man noch etwas weiter um, so daß man schließlich

$$\left(\frac{2\,U_0\,r_0}{\varrho}\right) = Re_z = -\,6500^{\frac{10}{7}} \cdot 0{,}289^{\frac{3}{7}} \left(\frac{\int_0^{\Theta} \sin^{3{,}86}\Theta\, d\Theta}{\operatorname{tg}^{\frac{10}{3}}\Theta \sin^{6{,}19}\Theta} \right)^{\frac{3}{7}} \tag{87}$$

$$Re_z = -\,162\,000 \left(\frac{\int_0^{\Theta} \sin^{3{,}86}\Theta\, d\Theta}{\operatorname{tg}^{\frac{10}{3}}\Theta \sin^{6{,}19}\Theta} \right)^{\frac{3}{7}} \tag{88}$$

die Reynoldsche Zahl aus dem Zylinderdurchmesser und der Zuströmgeschwindigkeit U_0 explizite als Funktion des Ablösungswinkels Θ erhält.

Zur numerischen Auswertung dieser Gleichung ermittelt man den Wert der Funktion

$$\int_0^{\Theta} \sin^{3{,}86}\Theta$$

am besten auf graphischem Wege.

Aus physikalischen Gründen fallen die kleinsten Werte von Re_z fort, weil bei den kleinen Reynoldschen Zahlen Laminarströmung herrscht, während die größten Werte nicht mehr in Frage kommen, weil die gemachten vereinfachenden Annahmen, insbesondere das $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz, wahrscheinlich nicht mehr mit genügender Annäherung erfüllt sein werden. Für den praktisch wichtigen Bereich erhält man aus der Gleichung (88) folgende Zahlenwerte:

Reynoldsche Zahl Re_z	Ablösungswinkel Θ	Ablösungswinkel Θ^0
20 000	1,8	103,1
68 000	2,0	114,6
183 000	2,2	126,1
551 000	2,4	137,5
2 080 000	2,6	149,0

Dieses Ergebnis stimmt ziemlich gut mit den Messungen von I. G. Taylor[15]) überein.

10. Theoretische und wirkliche Geschwindigkeitsverteilung im Kreiselradkanal

Die Anwendung der Ablösungsbedingung auf die Strömung im Kreiselradkanal setzt die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung längs der Schaufelkontur voraus. Daß die aus der eindimensionalen Kreiselradtheorie errechenbaren Relativgeschwindigkeiten mit den wirklichen nicht mit genügender Annäherung übereinstimmen werden, läßt sich schon aus dem Ergebnis der gleichen Geschwindigkeits- und damit auch Druckverteilung auf der Vorder- und Rückseite der Schaufeln folgern. Denn eine solche gleichartige Druckverteilung würde bei endlicher Schaufelzahl bedeuten, daß überhaupt keine Energie übertragen wird, während in Wirklichkeit die Energieübertragung doch gerade durch die Druckdifferenz zwischen der Vorder- und Rückseite der Schaufeln zustande kommt.

Man kann nun nach Flügel[16])–[18]) den Einfluß der endlichen Schaufelzahl berücksichtigen und die Verteilung der Geschwindigkeit innerhalb des Kanals ermitteln, indem man ein halbgraphisches Verfahren benutzt, welches ohne die Anwendung der etwas langwierigen Methoden der konformen Abbildung auskommt. Das Verfahren geht aus von der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen eines Elementarteilchens in Stromrichtung und senkrecht dazu, welche zusammen die Bedingung [VIII])

$$2\omega - \frac{dw}{dq} - \frac{w}{r_s} = 0 \tag{89}$$

ergeben. Für den Fall einer konstanten Krümmung r_s der Stromlinien ist diese Gleichung leicht integrierbar. Indessen enthält die Lösung

[15]) Taylor: Advisory Comittee for Aeronautics. Reports and Memoranda No. 191. London 1916.

[16]) Flügel: Ein neues Verfahren der graphischen Integration, angewandt auf Strömungen idealer Flüssigkeiten in Kreiselrädern. Dissertation. Verlag Oldenbourg. München 1914.

[17]) Stodola: Dampf- und Gasturbinen. 5. Aufl. Verlag Springer, Berlin 1922, S. 816.

[18]) Carrard: Sur le calcul des roues centrifuges. La Technique Moderne 1923 S. 65.

[VIII]) Siehe Anmerkung 16 Flügel: Gl. (17) S. 19.

die gesuchte Relativgeschwindigkeit w nur implizite. Die hier einsetzende graphische Methode ermöglicht, die endgültige Lösung durch Probieren zu finden. Das Verfahren ist ausführlich in der Originalarbeit Flügels entwickelt. Wir beschränken uns auf den Hinweis auf eine wesentliche Diskrepanz zwischen dem theoretischen Ergebnis des auf Pumpen- und Gebläseräder angewendeten Verfahrens und experimentell gewonnenen Resultaten.

Die Diskussion des Ergebnisses wird vereinfacht, wenn man auf den Fall gerader Schaufeln übergeht. Gleichung (89) nimmt dann die Form

$$2\omega - \frac{dw}{dq} = 0 \tag{90}$$

an. Die Integration ergibt

$$w = 2\omega q + w_v \tag{91}$$

welche Beziehung in die Kontinuitätsbedingung

$$V_s = b_s \int_0^q w \, dq \tag{92}$$

einzuführen ist, um den Wert für die Geschwindigkeit an der Schaufelvorderseite

$$w_v = \frac{\frac{V_s}{b_s} - \omega q^2}{q} \tag{93}$$

zu erhalten. Aus den beiden Gleichungen (91) und (93) ersieht man, daß wohl die Geschwindigkeit an der Schaufelvorderseite negativ werden, d. h. eine Rückströmung eintreten kann, nämlich wenn $\frac{V_s}{b_s} < \omega q^2$. Jedoch an der Schaufelrückseite ist nach diesen Formeln eine Rückströmung unmöglich. Denn bereits wenn $w = 0$, wäre nach (91) $w_v = -2\omega q$, was in (93) eingeführt $\omega q^2 = -\frac{V_s}{b_s}$ ergibt. Ein Rückströmen könnte hiernach erst bei negativer Fördermenge eintreten.

Die wirkliche Strömung in rotierenden Kreiselrädern ist verschiedentlich experimentell untersucht worden. Die wichtigsten Untersuchungen sind wohl die umfangreichen Messungen über die Verteilung der Relativgeschwindigkeit in rotierenden Gebläserädern, welche von

der A.G. Brown, Boveri & Cie ausgeführt wurden[17)–19)] und die photographischen Strömungsaufnahmen eines umlaufenden Pumpenrades von Oertli[20)]. Diese Untersuchungen führen nun zu einem ganz anderen Ergebnis. Die Ablösung tritt nämlich in Wirklichkeit mit abnehmender Fördermenge nicht auf der Schaufelvorderseite, wie es sich theoretisch ergibt, sondern auf der Rückseite der Schaufeln ein, welcher Fall theoretisch überhaupt unmöglich sein sollte. Diese Tatsache zeigt, daß die Vernachlässigung des Zähigkeitseinflusses in der Theorie im vorliegenden Fall unzulässig ist. Infolge der durch die Reibungskräfte verursachten Ablösung der Strömung von der Schaufelrückseite wird der ganze Charakter des Strömungsverlaufes so weitgehend verändert, daß die unter Voraussetzung einer reibungsfreien Strömung gewonnenen Ergebnisse zum Teil nicht mehr zutreffen. Während das Flügelsche Verfahren bei Turbinenrädern, wo die Strömung beschleunigt oder mit konstanter Geschwindigkeit verläuft, zu richtigen Ergebnissen führt, ist es auf Gebläse- oder Pumpenräder nicht anwendbar.

Deswegen besteht vorläufig nur die eine Möglichkeit, der Ablösungsbedingung eine Geschwindigkeitsverteilungsfunktion zugrundezulegen, welche aus experimentellen Messungen gewonnen worden ist. Die im folgenden angegebenen Werte sind noch nicht veröffentlichten Messungen der A.G. Brown, Boveri & Cie entnommen. Die Versuchsanordnung war jedoch die gleiche, welche Carrard bereits in seiner Abhandlung in der „Technique Moderne" beschrieben hat.

Es wurde ein Turbogebläserad mit einer normalen Fördermenge von 0,78 m³/sec untersucht. Das Rad hatte parallele Lauf- und Deckscheibe. Die übrigen Daten waren:

Drehzahl	$n = 4850$/Min.
Eintrittsdurchmesser . .	$d_1 = 0{,}30$ m
Austrittsdurchmesser . .	$d_2 = 0{,}55$ m
Radbreite	$b_2 = 0.02$ m
Schaufelaustrittswinkel .	$\beta_2 = 46{,}5^0$
Schaufelzahl	$z = 30$

[17)] Stodola: Dampf- und Gasturbinen. Nachtrag zur 5. Aufl. S. 22. Verlag Springer. Berlin 1924.

[18)] Carrard: Sur le calcul des roues centrifuges. La Technique Moderne 1923 S. 65.

[19)] Ostertag: Kolben- und Turbokompressoren. 3. Aufl. S. 212. Verlag Springer. Berlin 1924.

[20)] Oertli: Untersuchung der Wasserströmung durch ein rotierendes Zellen-Kreiselrad. Dissertation. Zürich 1923.

Fig. 7. Fördermenge = 0,405 m³/sec (Maßstab 1:2,5)

Fig. 8. Fördermenge = 0,650 m³/sec (Maßstab 1:2,5)

Verteilung der Relativgeschwindigkeiten im Kreiselradkanal (nach *BBC*-Messungen)

Fig. 9. Fördermenge = 0,876 m³/sec (Maßstab 1 : 2,5)

Fig. 10. Fördermenge = 1,13 m³/sec (Maßstab 1 : 2,5)

Verteilung der Relativgeschwindigkeiten im Kreiselradkanal (nach *BBC*-Messungen)

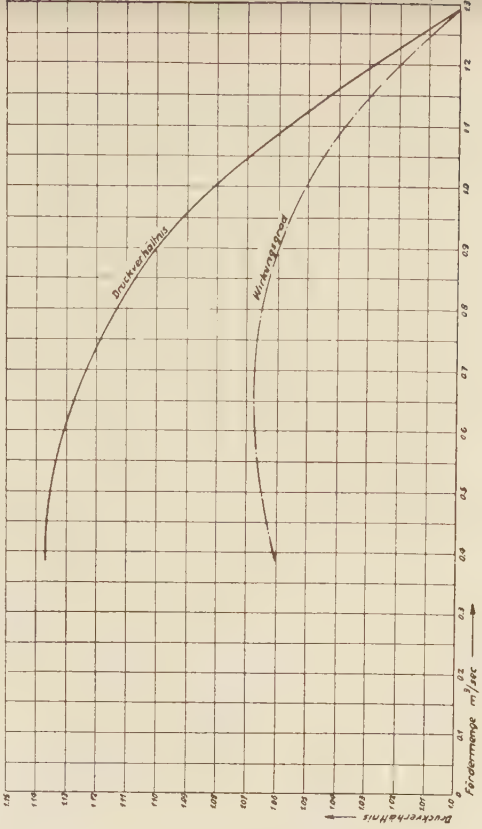

Fig. 11. Druckverhältnis und Wirkungsgrad des Versuchsgebläses

Fig. 12. Geschwindigkeitsverteilung an der Schaufelrückseite

Die Meßergebnisse sind in den Figuren 7—10 dargestellt. Die Druckvolumenkurve des Gebläserades zeigt Fig. 11.

Für die vorliegende Aufgabe der Berechnung des Ablösungspunktes interessiert nur der Geschwindigkeitsverlauf an der Schaufelrückseite. Deswegen ist dieser noch einmal in Fig. 12 in Funktion der Schaufellänge für die verschiedenen untersuchten Fördermengen aufgetragen. Man sieht, daß die Kurven der Geschwindigkeitsverteilung in guter Annäherung durch Parabeln gleichen Abstandes dargestellt werden können. Zwischen der maximalen Geschwindigkeit am Eintritt U_E und der Fördermenge besteht außerdem eine einfache lineare Beziehung, welche sich empirisch ergibt zu

$$U_{E\,[m/sec]} = 20 + 110\,V_{[m^3/sec]} \tag{94}$$

Eine noch genauere, aber dafür kompliziertere analytische Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung zu wählen hätte keinen Zweck, da ihre Genauigkeit der Größenordnung der Meßfehler nicht mehr entsprechen würde.

Der Geschwindigkeitsverlauf längs der Schaufelrückseite läßt sich also als Funktion der Schaufellänge für die verschiedenen untersuchten Fördermengen in folgender Weise analytisch darstellen:

Fördermenge 0,405 m³/sec: $U_1 = 64{,}6 - 8000\,x^2$
Fördermenge 0,650 m³/sec: $U_2 = 91{,}5 - 6070\,x^2$
Fördermenge 0,876 m³/sec: $U_3 = 116{,}2 - 4980\,x^2$
Fördermenge 1,130 m³/sec: $U_4 = 144{,}2 - 4120\,x^2$

Hierbei wird die Schaufellänge x in Meter gemessen.

11. Der Ablösungspunkt an der Kreiselradschaufel

Da die Integralbedingung aus dem Impulssatz der Grenzschicht abgeleitet ist, so ist sie wegen der Gültigkeit des Impulssatzes für die Relativströmung auch ohne Einschränkung für die Relativströmung im Kreiselrad anwendbar. Die Grenzschichtdicke berechnet sich infolgedessen genau wie bei der Absolutströmung mit veränderlicher Geschwindigkeit im reibungsfreien Bereich zu

$$\delta = \left(0{,}289\,\frac{\nu^{\frac{1}{4}}}{U^{4{,}11}} \int_0^x \frac{U^{4{,}11}}{U^{\frac{1}{4}}}\,dx \right)^{\frac{4}{5}} \tag{53}$$

mit $\delta = 0$ für $x = 0$. Die Ablösungsbedingung ist wiederum

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{Ablös.}} = -\frac{1}{6500}\frac{U}{\delta}\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{\frac{5}{8}} \tag{70}$$

In diese beiden Gleichungen ist zur Berechnung des Ablösungspunktes der empirisch ermittelte Wert der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion einzusetzen. Nach Berechnung der Potenzen $U^{3,86}$ für die den verschiedenen Fördermengen entsprechenden Geschwindigkeitswerte integriert man die Funktion

$$\int_0^x U^{3,86}\, dx$$

am besten graphisch.

Die Lösung der Gleichung (70) erfolgt ebenfalls auf graphischem Wege. Zu diesem Zwecke werden die Funktionen

$$F(x) = \frac{U^{\frac{13}{8}}}{6500\,\nu^{\frac{5}{8}}\,\delta^{\frac{3}{8}}}$$

und

$$f(x) = -\frac{dU}{dx}$$

in Abhängigkeit der Schaufellänge x aufgetragen. Ihr Schnittpunkt ergibt denjenigen Wert von x, bei welchem die Ablösung eintritt. Nach Durchführung der numerischen Rechnung erhält man für die verschiedenen Fördermengen:

$x_{\text{Ablös.}} = 0{,}046$ m für eine Fördermenge von 0,405 m³/sec
$x_{\text{Ablös.}} = 0{,}072$ m „ „ „ „ 0,650 m³/sec
$x_{\text{Ablös.}} = 0{,}095$ m „ „ „ „ 0,876 m³/sec
$x_{\text{Ablös.}} = 0{,}124$ m „ „ „ „ 1,130 m³/sec

Trägt man die sich ergebenden Ablösungspunkte in Abhängigkeit der Fördermenge auf (Fig. 13), so erkennt man, daß sie sich in erster Näherung ziemlich gut durch eine den Nullpunkt schneidende Gerade darstellen lassen. Naturgemäß darf die Kurve nicht beliebig weit extrapoliert werden. Immerhin ist es möglich und zulässig, diejenige Fördermenge abzuschätzen, bei welcher der Ablösungspunkt am äußersten Ende der Schaufel angelangt ist. Es sei hierfür eine Fördermenge von 1,68 m³/sec zugrunde gelegt. Unter Annahme einer den

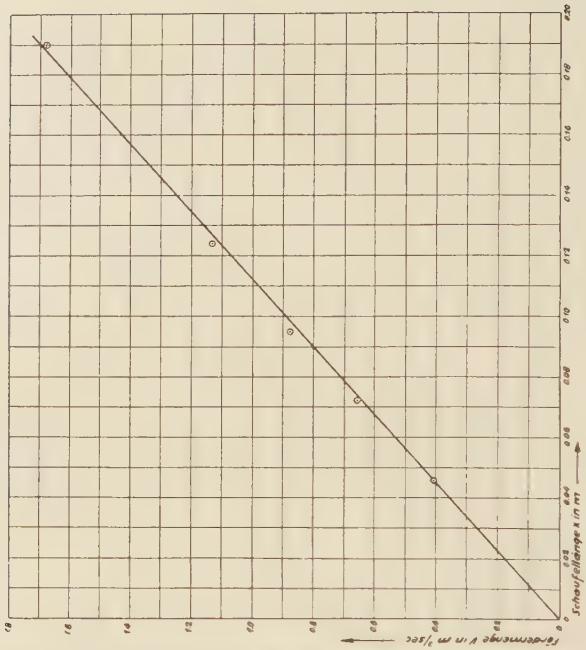

Fig. 13. Ablösungspunkt als Funktion der Fördermenge

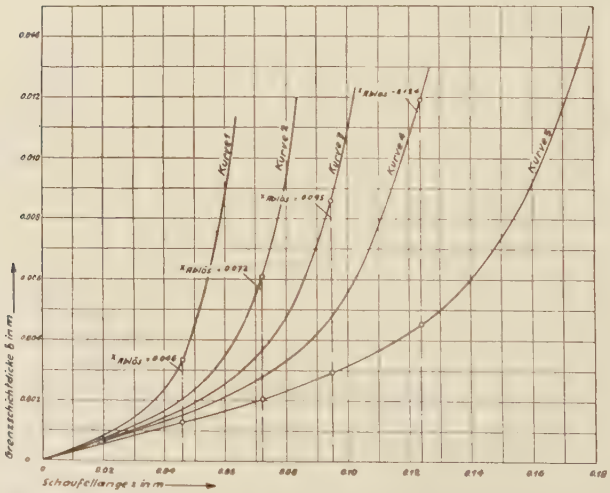

Fig. 14. Grenzschichtdicke δ als Funktion der Schaufellänge

anderen Fördermengen analogen Geschwindigkeitsverteilung erhält man die Funktion

$$U_5 = 205 - 2710\,x^2$$

Die Bestimmung des Ablösungspunktes erfolgt in gleichartiger Weise wie bei den vier gemessenen Fördermengen auf graphischem Wege. Als Resultat erhält man:

$$x_{\text{Ablös.}} = 0{,}198 \text{ m für eine Fördermenge von } 1{,}680 \text{ m}^3/\text{sec},$$

d. h. ein der Schaufellänge fast entsprechender Wert in Übereinstimmung mit der extrapolierten Kurve Fig. 13.

Die sich bei der Zahlenrechnung ergebende Dicke der Grenzschicht ist in dem Kurvenblatt Fig. 14 als Funktion der Schaufellänge aufgetragen.

12. Notwendige Schlitzbreite zur Verhinderung der Ablösung

Nachdem nunmehr der Ablösungspunkt in Funktion der Fördermenge ermittelt ist, entsteht die Frage nach der Größenordnung des der Grenzschicht durch die Spaltflüssigkeit zur Verhinderung der Ablösung zuzuführenden Impulses.

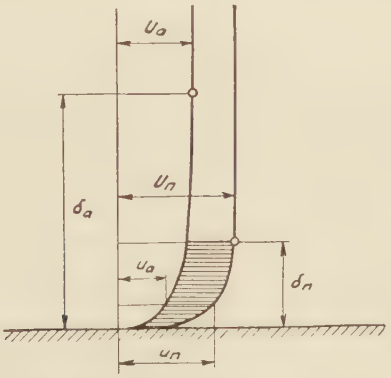

Fig. 15
Größen zur Berechnung der notwendigen Schlitzbreite

Es sei u_a die in der Grenzschicht bei der jeweiligen Fördermenge am Ablösungspunkt vorhandene Geschwindigkeit. Als notwendige Ge-

schwindigkeit u_n innerhalb der Grenzschicht sei diejenige bezeichnet, welche der Fördermenge entspricht, bei welcher der Ablösungspunkt gerade mit dem Endpunkt der Schaufel zusammenfällt. Beschränkt man sich auf den Bereich der notwendigen Grenzschichtdicke, so entspricht die Verteilung der notwendigen Geschwindigkeiten einem größeren Impuls gegenüber den wirklich vorhandenen. Dieser neue Impuls soll der Grenzschicht durch die Spaltflüssigkeit zugeführt werden. Da es sich nur um die Bestimmung der Impulsgröße handelt, sei zur Vereinfachung der Rechnung die Gültigkeit des $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes bis in unmittelbare Wandnähe ausgedehnt. Der neu zuzuführende Impuls berechnet sich dann für die Breite 1 zu

$$I_n = \int_0^{\delta_n} \varrho\, u_n^2\, dy - \int_0^{\delta_n} \varrho\, u_a^2\, dy \tag{95}$$

u_n und u_a ergeben sich als Funktionen von y in der Form

$$u_n = U_n \left(\frac{y}{\delta_n}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{96}$$

$$u_a = U_a \left(\frac{y}{\delta_a}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{97}$$

Man erhält also

$$I_n = \int_0^{\delta_n} \varrho\, U_n^2\, \frac{y^{\frac{2}{7}}}{\delta_n^{\frac{2}{7}}}\, dy - \int_0^{\delta_n} \varrho\, U_a^2\, \frac{y^{\frac{2}{7}}}{\delta_a{}^{\frac{2}{7}}}\, dy \tag{98}$$

oder

$$I_n = \frac{7}{9}\, \delta_n^{\frac{9}{7}}\, \varrho \left(\frac{U_n^2}{\delta_n^{\frac{2}{7}}} - \frac{U_a^2}{\delta_a^{\frac{2}{7}}}\right) \tag{99}$$

Der Spalt hat die Breite s. Die Flüssigkeit strömt innerhalb des Spaltes mit der theoretischen Geschwindigkeit $w_s = \sqrt{2\,g\,\Delta h}$, wenn Δh der Druckhöhenunterschied zwischen Vorder- und Rückseite einer Schaufel ist. w_s bedeutet die Übergeschwindigkeit gegenüber der schon vorhandenen Zuströmgeschwindigkeit. Der zugeführte Impuls ist für die Breite 1

$$I_n = \varrho\, w_s^2\, s \tag{100}$$

Aus (99) und (100) ergibt sich die theoretische Spaltbreite somit zu

$$s = \frac{7}{9} \frac{\delta_n^{\frac{9}{7}}}{w_s^2} \left(\frac{U_n^2}{\delta_n^{\frac{2}{7}}} - \frac{U_a^2}{\delta_a^{\frac{2}{7}}} \right) \tag{101}$$

oder

$$s = \frac{7}{9} \frac{\delta_n^{\frac{9}{7}}}{2 g \Delta h} \left(\frac{U_n^2}{\delta_n^{\frac{2}{7}}} - \frac{U_a^2}{\delta_a^{\frac{2}{7}}} \right) \tag{102}$$

Zur Abschätzung der Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite einer Schaufel sei als erste Näherung angenommen, daß die auf die radiale Projektion eines Flächenelementes wirkende Pressung konstant sei.

$$\gamma \Delta h \; db_s \; dr = \text{const} \tag{103}$$

Das auf einen Flächenstreifen von der Breite b_s und der Höhe dr wirkende Moment ist

$$dMd_{\text{Schaufel}} = \gamma \Delta h b_s r \, dr \tag{104}$$

Für das auf eine Schaufel wirkende Moment kann man demnach schreiben

$$Md_{\text{Schaufel}} = \gamma \Delta h b_s \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \tag{105}$$

wenn die Schaufelbreite b_s, wie es bei dem untersuchten Rad der Fall, keine Funktion des Radius, sondern konstant ist. Für das ganze Laufrad ergibt sich bei einer Zahl von z Schaufeln das Drehmoment zu

$$Md_{\text{Rad}} = z \gamma \Delta h b_s \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \tag{106}$$

oder

$$Md_{\text{Rad}} = \frac{1}{2} z \gamma \Delta h b_s (r_2^2 - r_1^2) \tag{107}$$

Ein zweites Mal erhält man das Drehmoment des Rades aus dem Eulerschen Momentensatz als Massenstrom pro Sekunde mal Differenz der Geschwindigkeitsmomente am Ein- und Austritt. Da am Laufradeintritt der radialen Zuströmung wegen kein Moment auftritt, so verbleibt

$$Md_{\text{Rad}} = M_{\text{sec}} r_2 c_{u_2} \tag{108}$$

Der durch das Rad fließende Massenstrom pro Sekunde ist

$$M_{sec} = \frac{\gamma}{g} V, \tag{109}$$

wobei sich das sekundliche Volumen aus den Abmessungen des Rades bei einer Querschnittsverengung im Austritt von 8% zu

$$V = d_2 \pi b_s c_{m_2} 0{,}92 \tag{110}$$

berechnet. Für die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit am Austritt kann man auch schreiben (siehe Fig. 1)

$$c_{u_2} = u_2 - \operatorname{ctg} \beta_2 c_{m_2} \tag{111}$$

Man erhält also aus der Gleichung (108) mit Benutzung von (109) — (111)

$$M d_{\text{Rad}} = 0{,}92 \pi \frac{\gamma}{g} d_2 b_s c_{m_2} r_2 (u_2 - \operatorname{ctg} \beta_2 c_{m_2}) \tag{112}$$

was, in Gleichung (107) eingesetzt, die gewünschte Beziehung für die mittlere Druckhöhendifferenz zwischen Vorder- und Rückseite einer Schaufel liefert, nämlich

$$\Delta h = 5{,}78 \frac{d_2 r_2 (u_2 - \operatorname{ctg} \beta_2 c_{m_2}) c_{m_2}}{g z (r_2^2 - r_1^2)} \tag{113}$$

Für die Abmessungen des vorliegenden Laufrades, bei welchem

$d_2 = 0{,}55$ m $\quad u_2 = 139{,}6$ m/sec $\quad z = 30 \quad \beta_2 = 46{,}5^0$

$r_1 = 0{,}15$ m $\quad r_2 = 0{,}275$ m $\quad b_s = 0{,}02$ m

ist, ergibt sich

$$\Delta h = 7{,}8\ c m_2 - 0{,}95\ c m_2^2 \tag{114}$$

Da die Meridiangeschwindigkeit der Fördermenge proportional ist nach der Beziehung

$$c_{m_2} = \frac{V}{0{,}92 \pi d_2 b_s} \tag{115}$$

(bei 8% Querschnittsverengung durch die Schaufeldicke) und mit den speziellen Werten des betrachteten Rades

$$c_{m_2} = 31{,}5\ V \tag{116}$$

so erhält man als Ausdruck für die mittlere Druckhöhendifferenz einer Schaufel in Meter

$$\Delta h = 245{,}5\, V - 1{,}67\, V^2 \tag{117}$$

Die Berechnung der notwendigen Schlitzbreiten für die verschiedenen Fördermengen ist in der folgenden Zahlentafel ausgeführt.

Berechnung der notwendigen Schlitzbreite

Fördermenge	0,405	0,650	0,876	1,130
$x_{\text{Ablös.}}$	0,046	0,072	0,095	0,124
U_a	47,7	60,1	71,3	80,8
U_n	199,3	190,9	180,6	153,3
δ_a	0,00325	0,00610	0,00870	0,01200
δ_n	0,00124	0,00202	0,00290	0,00446
Δh	99,1	158,7	213,7	275,2
s	0,0191	0,0171	0,0155	0,0120

Als Endergebnis der theoretischen Rechnung ergibt sich also, daß bei der Fördermenge von 0,405 m^3/sec die zur Verhinderung der Ablösung notwendige Schlitzbreite ca. 19 mm beträgt. Wenn man einen solchen Schlitz in annähernd tangentialer Richtung in das Schaufelprofil des untersuchten Rades einzeichnet, so erkennt man, daß von der ursprünglichen Schaufel nicht mehr sehr viel Material stehen bleiben würde. Die Schaufel würde fast vollständig verschwinden. Dabei entspricht die Fördermenge von 0,405 m^3/sec erst der Pumpgrenze des untersuchten Rades. Für Fördermengen unterhalb der Pumpgrenze würde sich ein noch größerer Wert der zur Verhinderung der Ablösung notwendigen Schlitzbreite ergeben. Wollte man in der Tat eine solche wesentliche Veränderung des Schaufelprofiles vornehmen, so dürfen die der Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen der Geschwindigkeitsverteilung und des mittleren Schaufeldruckes natürlich nicht mehr beibehalten werden, da die Strömung einen ganz anderen Charakter annehmen würde. Das Verhalten einer solchen Schlitzanordnung kann auf Grund der vorstehenden Rechnung nicht ohne weiteres beurteilt werden. Es ist jedoch zu vermuten, daß infolge des großen Abstandes der Schaufelstummel der auftretende Spaltverlust eine eventuelle Verbesserung der Druckvolumenkurve weit überwiegen würde.

II. Teil

Versuche

13. Versuchsanordnung

Obwohl die vorstehende zu einem negativen Ergebnis führende theoretische Rechnung bereits vor Beginn der Versuche abgeschlossen war, wurden dieselben trotzdem ausgeführt einmal, weil die Vorbereitungen bereits getroffen waren, und zum anderen, um eine wenn auch nur negative Bestätigung der Rechnungsresultate zu erhalten. Die Versuche wurden in den Werkstätten der A.G. Brown, Boveri & Cie in Baden (Schweiz) vorgenommen. Die Versuchsanordnung bestand aus einem einstufigen Turbegebläse, welches von einem Gleichstrommotor über ein zwischengeschaltetes Dynamometer mit einer Drehzahl von 4850 T/Min. angetrieben wurde. Um die Lagerreibungsverluste möglichst zu verringern und damit die Genauigkeit der Messung der reinen Radleistung zu erhöhen, war die Gebläsewelle auf Kugeln gelagert. Die auf die Kugellager geleiteten Druckölstrahlen wurden infolge der hohen Wellendrehzahl fein zerstäubt, so daß die Lager trotz großer Ölmenge einwandfrei arbeiten konnten. Eine Kühlvorrichtung ermöglichte die Innehaltung einer konstanten Öltemperatur. Infolgedessen konnten die vor Beginn der Versuche gemessenen Lagerverluste als konstant angesehen werden.

Der totale Enddruck wurde am Ende einer geraden Rohrstrecke von 1,2 m gemessen, da es sich herausgestellt hatte, daß die Ungleichförmigkeiten der Rohrströmung in dieser Entfernung genügend ausgeglichen waren. Die Volumenmessung erfolgte auf der Druckseite des Gebläses mittels einer direkt ins Freie ausblasenden geeichten VdI-Düse von 150 mm Durchmesser, welcher ein gerades Rohr von 375 mm Durchmesser vorgeschaltet war. Zwischen Druckschieber und Düsenmeßrohr war zum Ausgleich der Luftströmung ein mit den für Filteranlagen häufig verwendeten Raschig-Ringen angefüllter Doppelkonus eingebaut.

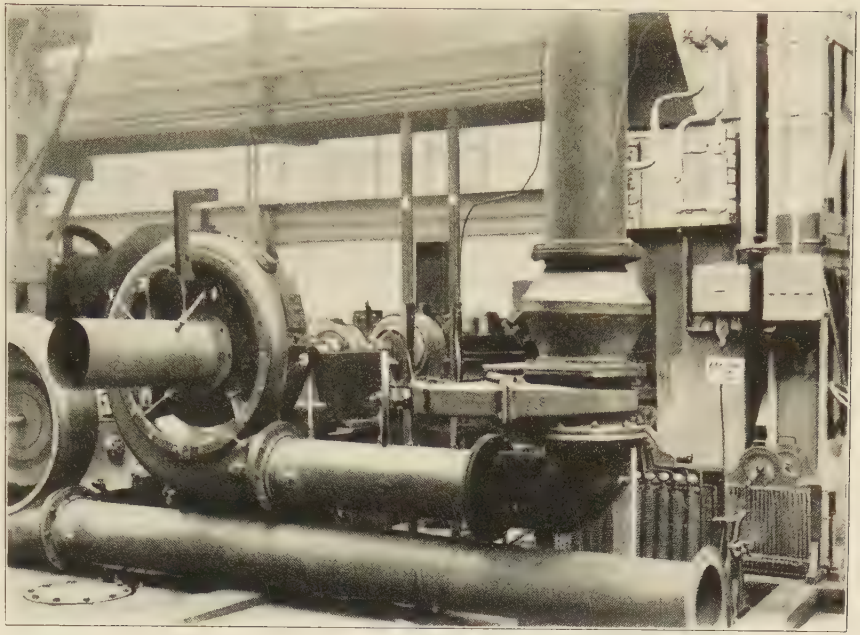

Fig. 16. Versuchsanordnung. Gebläseseite

1. Ansaugetemperatur t_a
2. Ansaugedruck p_a
3. Endtemperatur t_e
4. Enddruck p_e
5. Temperatur vor Düse td_1
6. Druck vor Düse $pd_{1\text{tot}}$

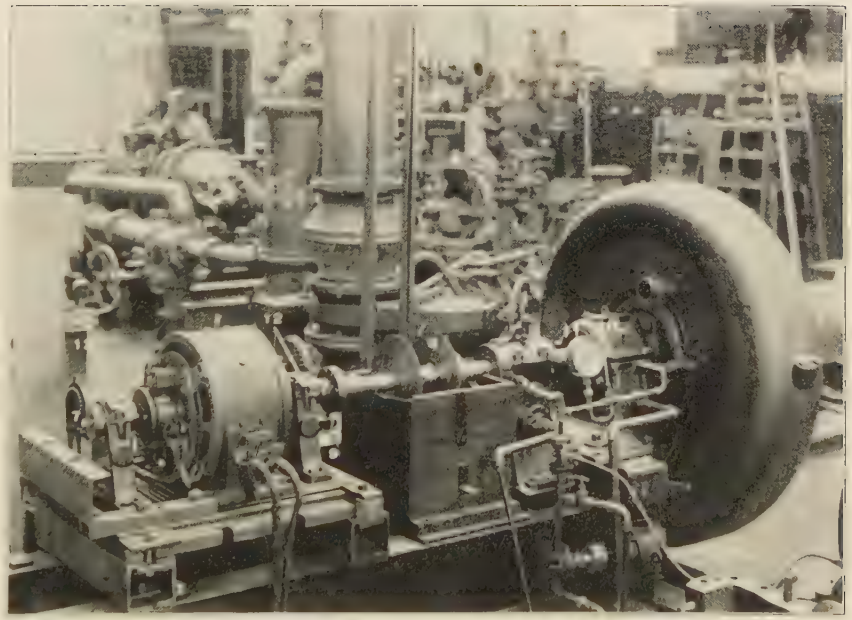

Fig. 17. Versuchsanordnung. Motorseite

7. Drehzahl	n	10. Öltemperatur	$t_{\text{Öl}}$
8. Drehmoment	Md	11. Öldruck	$p_{\text{Öl}}$
9. Strom, Spannung	E, I	12. Lagertemperatur	t_{Lager}

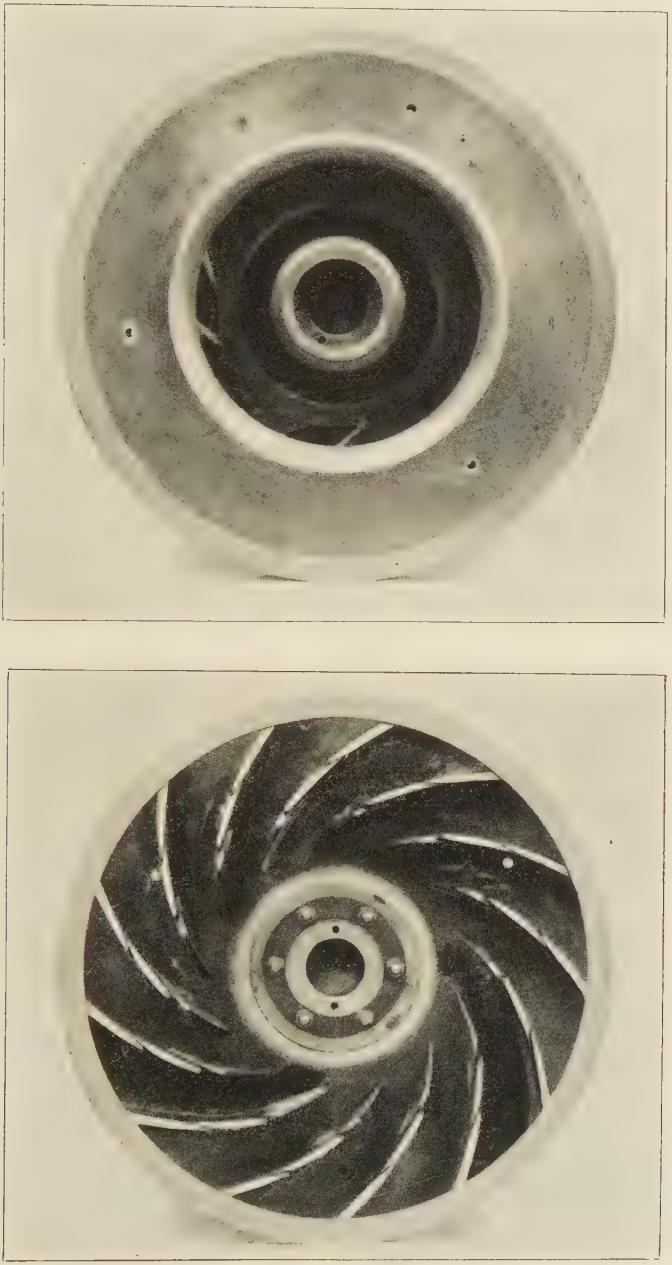

Fig. 18. Ansicht des Versuchslaufrades mit aufgesetzter und abgenommener Deckscheibe

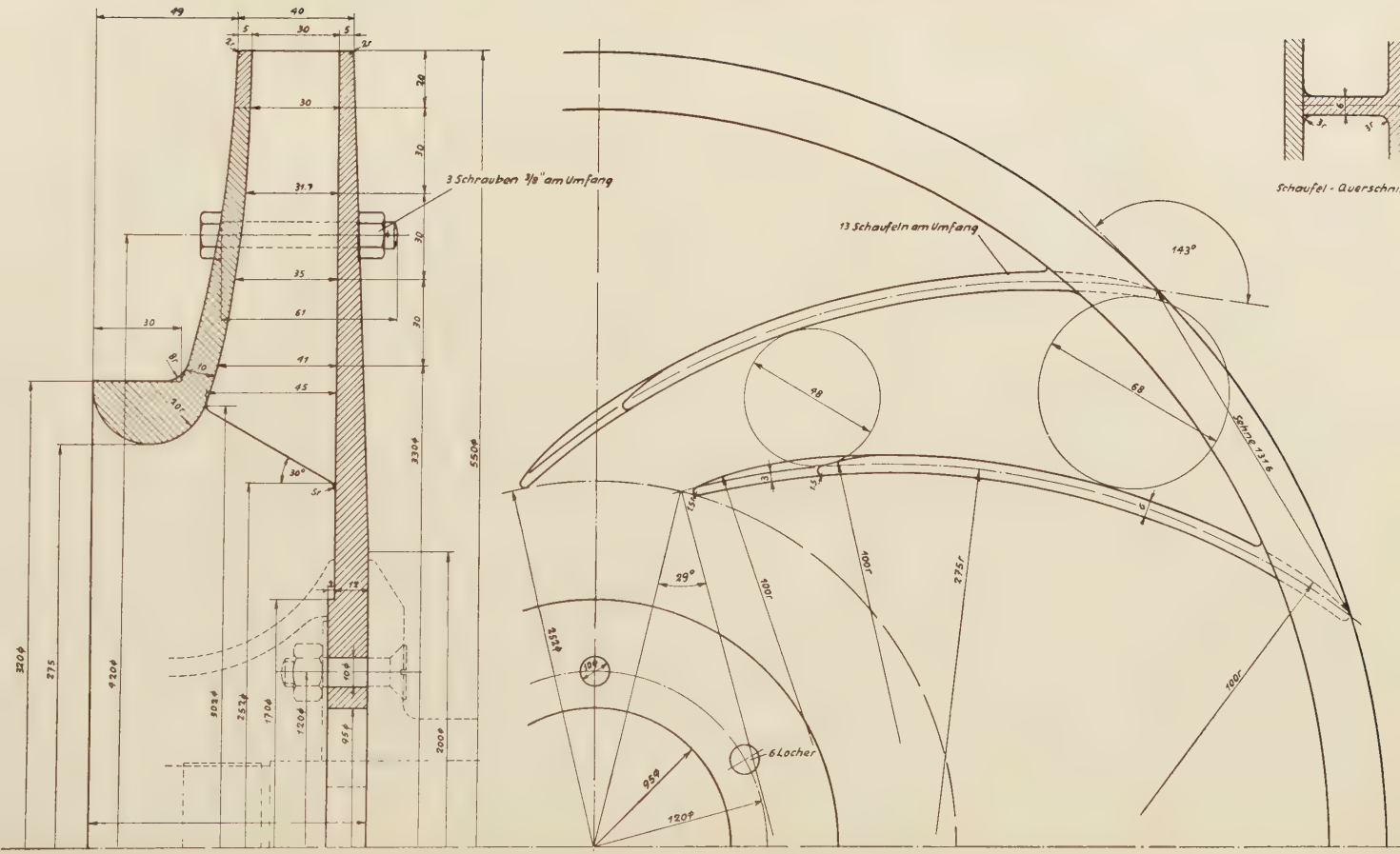

Fig. 19. Schaufelplan des Versuchslaufrades (Maßstab 1 : 2,5)

Infolge verhältnismäßig großer Ungleichförmigkeit der Lufttemperatur am Eintritt erwies es sich als notwendig, ein Saugrohr von 1 m Länge anzubringen, um eine genügende Durchmischung der Luft vor Eintritt in das Gebläse zu erreichen und damit eine genauere Messung der Eintrittstemperatur zu ermöglichen. Durch die Anordnung des Saugrohres wurde es weiterhin notwendig, den Unterdruck an der Saugseite zu messen. Die Einzelheiten der Versuchsanordnung sind in den Photos Fig. 16 und 17 zu erkennen.

14. Reihenfolge der Versuche

Da ein in der sonst üblichen Weise aus Stahlblech hergestelltes und genietetes Laufrad keine besonders weitgehende und leichte Veränderung der zu untersuchenden Schlitzformen zugelassen hätte, wurde als Versuchsrad ein aus Elektronguß hergestelltes Laufrad verwendet. Die Deckscheibe des Rades war abnehmbar (Fig. 18) und wurde durch einen Ring am äußeren Umfang von 20 mm Breite zentriert. Als Befestigung erschienen drei quer durch das Laufrad gezogene Schraubenbolzen ausreichend. Die Vorversuche bestanden in der Eichung des Dynamometers, welche mittels Wägung vorgenommen wurde, und in der Ermittelung der Verlustleistungen. Die Bestimmung der letzteren erfolgte in der Weise, daß einmal das an der Motorkupplung abgegebene und vom Dynamometer angezeigte Drehmoment bei abgenommenem Gebläserad bei verschiedenen Drehzahlen gemessen wurde, und daß ein zweites Mal dieselbe Messung bei aufgesetztem aber vollständig abgeschlossenem Laufrad ausgeführt wurde. Die erste Messung, bei welcher das Gewicht des Laufrades überdies durch eine aufgesetzte kleine Eisenscheibe nachgeahmt wurde, ergab die Verluste der Gebläselager und die Ventilationsverluste der gebläseseitigen Dynamometerscheibe. Die zweite Messung ergab die Radreibungsverluste plus den Verlusten der ersten Messung. Die Radreibungsverluste wurden bei zwei verschiedenen Verschlußarten des Radeintrittes, mit einer am Rad selbst und einer am Gehäuse befestigten Verschlußscheibe untersucht (siehe Fig. 23). Der Verschluß des Radaustrittes wurde in beiden Fällen in der Weise erreicht, daß das Rad längs des Umfanges mit Klaviersaitendraht bewickelt und dann verlötet wurde, welche Verbindung eine gute Haltbarkeit gezeigt hat und trotzdem leicht lösbar war. Nach der Ermittelung dieser Verlustleistungen wurden die eigentlichen Versuche vorgenommen, welche in der Bestimmung der Druckvolumen-, Wirkungsgrad- und Leistungskurven des Gebläses für verschiedene Schlitzanordnungen bestanden.

Das Rad wurde zuerst mit dem normalen schlitzlosen Schaufelprofil und dann mit einer Reihe von Schlitzanordnungen untersucht, bei welchen die Breite, Zahl und Länge der Schlitze sukzessive geändert waren. Nach jedesmaligem Fräsen der Schlitze wurde das Rad wiederum balanciert und mit 30% Überdrehzahl ausgeschleudert. Aus dem Schaufelplan Fig. 19 ist ersichtlich, daß eine konische Deckscheibe im Gegensatz zu dem der theoretischen Rechnung zugrunde liegenden parallelwandigen Laufrad verwendet wurde, welche Änderung auf das prinzipielle Ergebnis jedoch keinen großen Einfluß haben dürfte. Die Form der Schlitzanordnungen ist aus den Skizzen ersichtlich, welche den einzelnen Kurvenblättern im Abschnitt „Versuchsauswertung" beigegeben sind.

15. Rechnungsgrundlagen

Um die Meßergebnisse auf einer gemeinsamen Grundlage vergleichen zu können, ist es nötig, ein konstantbleibendes spezifisches Gewicht zugrunde zu legen bzw. das Druckverhältnis und die Leistung auf eine bestimmte Ansaugetemperatur zu reduzieren. Als Reduktionstemperatur wurde bei der Auswertung 15° C gewählt.

Ist der gemessene Anfangsdruck p_a und der Enddruck p_e, so ist das gemessene Druckverhältnis

$$\left(\frac{P_e}{P_a}\right)_{\text{gem.}} = 1 + \frac{p_e - p_a}{P_a}, \tag{118}$$

wobei die absoluten Drücke mit großen Buchstaben bezeichnet sind. Für das auf 15° C reduzierte Druckverhältnis ergibt sich

$$\left(\frac{P_e}{P_a}\right)_{(15^0)} = 1 + \frac{p_e - p_a}{P_a}\,\frac{T_a}{288} \tag{119}$$

Das mit der Düse gemessene Luftvolumen ist

$$V_d = k_d F_d c_d \quad (k_d = \text{Düsenkoeffizient}) \tag{120}$$

c_d bedeutet die Geschwindigkeit im engsten Düsenquerschnitt und berechnet sich zu

$$c_d = \sqrt{\frac{2 g \Delta p_d}{\gamma}}, \tag{121}$$

wobei zu beachten ist, daß mit Δp_d die Differenz aus dem totalen Druck im Rohr vor der Düse und dem statischen Druck im engsten Düsenquerschnitt bezeichnet ist.

$$\Delta p_d = p_{d_{1\text{tot}}} - p_{d_{2\text{stat}}} \tag{122}$$

Infolge der Expansion der Luft in der Düse ist das spezifische Gewicht nicht konstant. Setzt man trotzdem

$$\gamma = \frac{P_{d_2}}{R\, T_{d_1}}, \tag{123}$$

so ist dies nur zulässig, wenn später eine die Veränderlichkeit von γ berücksichtigende Korrektur angebracht wird.
Mit Gleichung (123) ergibt sich das durch die Düse strömende Volumen zu

$$V_d = 23{,}976\, k_d\, F_d \sqrt{\frac{\Delta p_d\, T_{d_1}}{P_{d_2}}} \tag{124}$$

oder mit dem aus Versuchen ermittelten Düsenkoeffizient $k_d = 0{,}99$ und für eine Düse von 150 mm Durchmesser

$$V_d = 0{,}4194 \sqrt{\frac{\Delta p_d\, T_{d_1}}{P_{d_2}}} \tag{125}$$

Das Ansaugvolumen berechnet sich mit der Reduktion

$$V = V_d \frac{P_{d_2}}{P_a} \frac{T_a}{T_{d_1}} \tag{126}$$

zu

$$V = 0{,}4194 \sqrt{\frac{\Delta p_d\, P_{d_2}}{T_{d_1}}} \frac{T_a}{P_a} \tag{127}$$

Mit dieser Formel ergibt sich infolge der gemachten vereinfachenden Annahme eines konstanten γ ein etwas zu großer Wert. Der hierbei gemachte Fehler ist in der Kurve Fig. 22 in Abhängigkeit der gemessenen Wassersäule aufgetragen.

Der Wirkungsgrad wird bei Gebläsen häufig dargestellt als das Verhältnis der adiabatischen zur wirklich gemessenen Leistung. Nun können die Verluste im Gebläse so aufgefaßt werden, als ob der Luft während der Verdichtung eine den Verlusten entsprechende Wärmemenge zugeführt würde. Die wirkliche Zustandsänderung ist also eine Polytrope. Soll der Gebläsewirkungsgrad entsprechend dem üblichen Begriff des Wirkungsgrades als Verhältnis der nutzbaren zur aufgewendeten Leistung dargestellt werden, so ist es sinngemäß, die polytropische als nutzbare Leistung einzusetzen, da der höheren Endtemperatur bei der Verdichtung auch eine größere Arbeitsfähigkeit des Fördermediums bei der Expansion entspricht. Der polytropische Wir-

kungsgrad ergibt demnach etwas höhere Werte als der adiabatische. Die nutzbare polytropische Leistung ist in KW

$$N_{pol} = \frac{P_a V}{102} \frac{m}{m-1} \left[\left(\frac{P_e}{P_a} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] \tag{128}$$

oder auch

$$N_{pol} = \frac{P_a V}{102\, T_a} \frac{m}{m-1} [T_e - T_a] \tag{129}$$

während die der Luft zugeführte Leistung sich zu

$$N_{aufgew} = \frac{P_a V}{102\, R\, T_a} c_p [T_e - T_a] 427 \tag{130}$$

ergibt.

Bildet man den Quotienten aus Gleichung (129) und (130), so erkennt man, daß der polytropische Wirkungsgrad nur eine Funktion des Exponenten m ist, nämlich

$$\eta_{pol} = \frac{m}{m-1} \frac{R}{427\, c_p} = 0{,}28826 \frac{m}{m-1} \tag{131}$$

Die Division der Gleichung (128) durch die Gleichung (130) ergibt für η_{pol} einen Ausdruck, welcher für eine bestimmte Anfangstemperatur außer $\frac{m}{m-1}$ nur noch das Druckverhältnis $\frac{P_e}{P_a}$ und die Temperaturdifferenz $Te - Ta = \Delta t$ als Variable enthält. Aus $\frac{P_e}{P_a}$ und Δt kann also der Wirkungsgrad η_{pol} bzw. der Exponent m bestimmt werden. In der Fig. 20 ist eine diesem Zwecke dienende Kurventafel entworfen, in welche außerdem noch das jeweilige Endvolumen eingetragen ist. Zur Verwendung dieser Kurventafel ist die gemessene Temperaturdifferenz noch auf die Anfangstemperatur von 15° C entsprechend der Reduktion

$$\Delta t_{(15^0)} = \frac{288}{T_a} \Delta t_{gem.} \tag{132}$$

zu beziehen.

Die den verschiedenen Wirkungsgraden entsprechenden polytropischen Arbeiten pro m³ gemäß Gleichung (128) sind in der Kurventafel Fig. 21 für einen Anfangsdruck von 1 ata aufgetragen.

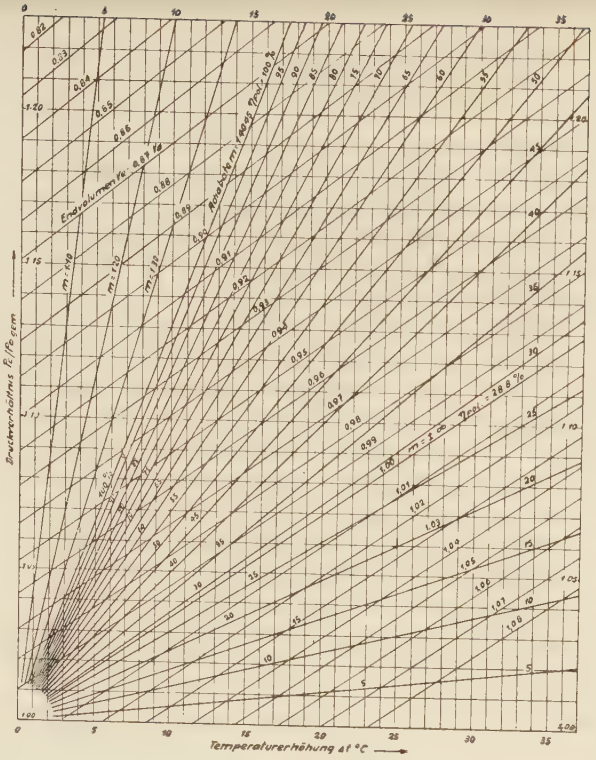

Fig. 20

Bestimmung des polytr. Wirkungsgrades aus Druckverhältnis u. Temperaturerhöhung für eine Anfangstemp. von 15° C

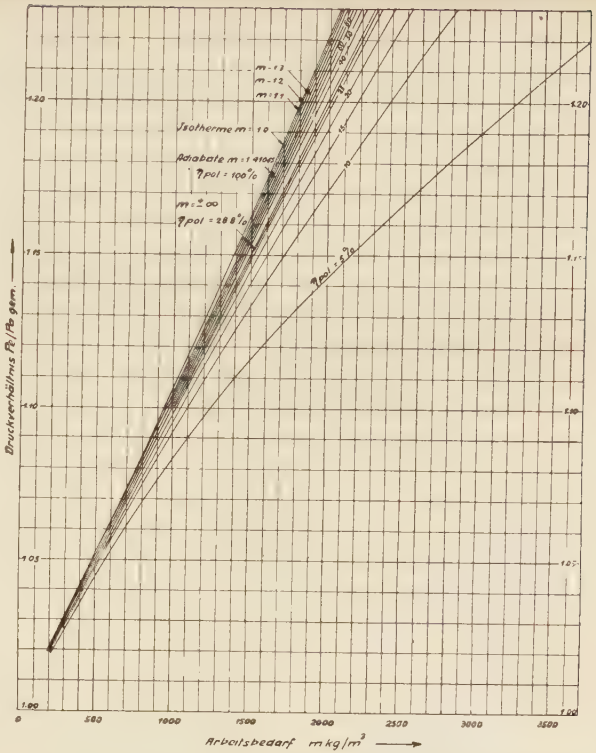

Fig. 21

Polytropische Arbeit in Funktion des Druckverhältnisses für einen Anfangsdruck von 1 ata

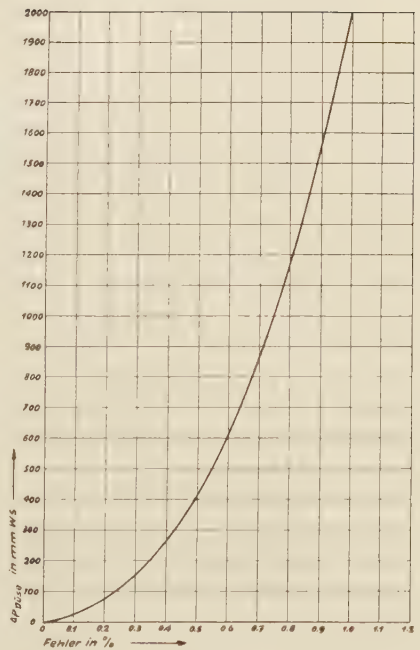

Fig. 22
Strömung durch eine Düse
Korrektur der einfachen Volumenformel

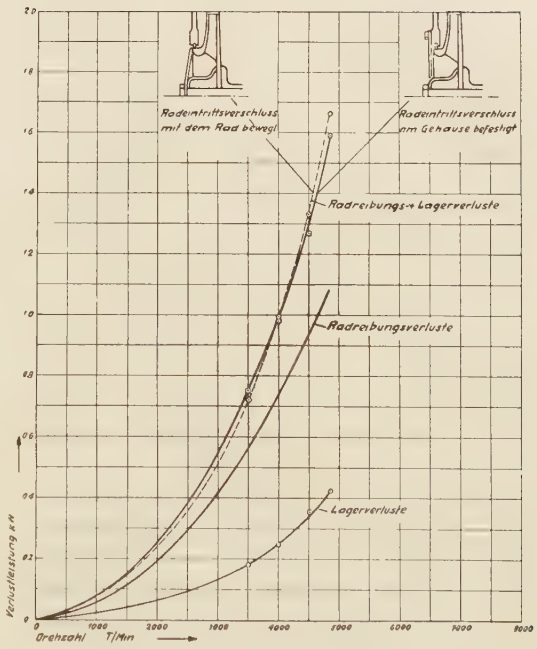

Fig. 23
Lager- und Radreibungsverluste in Funktion der Drehzahl

Wollte man die dem Gebläse zuzuführende Leistung auf Grund obigen aus der Temperatur ermittelten Wirkungsgrades berechnen, so würde sich ein mit der wirklichen Leistungsaufnahme nicht übereinstimmender Wert ergeben. Der Grund hierfür ist in der Tatsache zu suchen, daß die wirkliche beispielsweise mit einem Dynamometer gemessene Leistungsaufnahme nicht mit derjenigen der Gleichung (130) übereinstimmt. Es ist nämlich die gemessene Temperaturdifferenz nicht vollkommen gleich derjenigen, welche der wirklichen Zustandsänderung entsprechen würde, sondern etwas geringer infolge Abstrahlung eines Teiles der Wärme durch das Gehäuse und die Rohrleitungen. Jedoch ist dieser Einfluß weniger wichtig als der Umstand, daß die Düsenmessung besonders bei kleiner werdender Menge bei weitem nicht der wirklichen durch das Gebläse strömenden Luftmenge entspricht, weil ein gewisser Teil der angesaugten Luftmenge infolge ungleichmäßiger Energieverteilung der einzelnen Stromfäden und infolge des Pumpens wieder auf der Eintrittsseite des Laufrades herausströmt. Damit bei der Fördermenge Null der polytropische Wirkungsgrad aus der Temperaturmessung gleich Null wird, müßte die Temperaturerhöhung unendlich groß werden, während die Messung eine bestimmte konstante Temperaturerhöhung ergibt. Vergleicht man den Verlauf der Wirkungsgradkurven bei normalen Maschinen, so zeigt sich, daß die Differenz zwischen dem polytropischen Wirkungsgrad aus Temperatur und aus Leistung am größten bei der Fördermenge Null ist, um dann mit wachsender Fördermenge kontinuierlich abzunehmen bis zur fast vollständigen Übereinstimmung beider Werte.

16. Auswertung

Da es sich bei den Versuchen hauptsächlich um die Eigenschaften des Rades bei kleiner Fördermenge handelte, wurde zur Volumenmessung eine verhältnismäßig kleine Düse verwendet, um auch bei den kleinen Luftmengen eine mit genügender Genauigkeit meßbare Wassersäule zu erhalten. Infolgedessen waren die Versuchswerte nur etwa bis zu dem Punkt des maximalen Wirkungsgrades zu ermitteln. Von der Verwendung einer zweiten größeren Düse wurde Abstand genommen, da die Versuchsresultate bei größerer Fördermenge für die vorliegende Aufgabe von geringerem Interesse sind.

Die bei dem Versuchsgebläse aus der Temperaturerhöhung bestimmten η_{po}-Werte weisen eine ziemlich starke Streuung auf, da die bei der Messung aufgetretenen Schwankungen der Ansaugetemperatur von mehreren Graden bei dem kleinen Gefälle des Gebläses von ca. 13°

im Mittel die Genauigkeit der Messung stark verringerten. Da der polytropische Wirkungsgrad aus der Temperatur ohnehin nur dann eine Bedeutung gewinnen wird, wenn die wirkliche Leistungsaufnahme eines Gebläses nicht gemessen werden kann, so ist in den folgenden Kurvenblättern nur der für dieses kleine Gefälle mit wesentlich größerer Genauigkeit meßbare polytropische Wirkungsgrad aus der Leistung aufgetragen. Die Lager- und Radreibungsverluste ergeben sich aus dem Kurvenblatt Fig. 23. Auf allen die Ergebnisse der verschiedenen Schlitzanordnungen darstellenden Kurvenblättern sind die Werte der schlitzlosen Schaufel zum Vergleich enthalten. Der Austrittswinkel der Schaufeln betrug 37° im Gegensatz zu dem üblichen Winkel von ca. 60°. Dies entspricht bereits einer starken Rückwärtskrümmung. Infolgedessen liegt die Pumpgrenze erst bei einer sehr kleinen Fördermenge im Verhältnis zum Normalvolumen. Man erkennt aus den Kurvenblättern, daß trotz dieser schon sehr tief liegenden Pumpgrenze des schlitzlosen Rades die verhältnismäßig schmalen Schlitze der ersten Anordnungen die Druckvolumen- und Wirkungsgradkurven der ursprünglichen Schaufelform nur ganz unwesentlich verändern. Erst wenn größere Teile des ursprünglichen Schaufelprofiles entfernt werden, tritt eine deutlichere Änderung des Kurvencharakters ein. Zwar gelingt es schließlich, wie aus dem Kurvenblatt Fig. 37 ersichtlich, eine ständig fallende Druckvolumenkurve zu erhalten, jedoch mit einem bedeutend schlechteren Wirkungsgrad, als der ursprünglichen Schaufelform entspricht. Auch kann bei diesem Schaufelprofil von einem Schlitz eigentlich nicht mehr gesprochen werden. Eher könnte man das Rad als ein solches mit zwei Schaufelkränzen bezeichnen. Der geringe Enddruck, welchen ein derartiges Rad erzeugt, würde gerade, selbst wenn man von dem schlechten Wirkungsgrad absehen wollte, den sonst in Frage kommenden Vorteil der höheren Belastbarkeit und damit kleineren notwendigen Radzahl bei Rädern ohne Pumpgrenze wieder zunichte machen. Ein solches Rad wäre für praktische Zwecke nicht gut brauchbar.

Auswertungsblatt: Schlitzanordnung I.

Meßpunkt Nr.		1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_a	°C	23,4	23,7	22,3	21,1	15,1	17,1	19,6	23,0	33,3
T_a	° abs	296,4	296,7	295,3	294,1	288,1	290,1	292,6	296,0	306,3
$T_a/288$	° abs/° abs	1,029	1,030	1,026	1,021	1,001	1,007	1,016	1,028	1,063
P_o	kg/m² abs	9940	9940	9940	9940	9922	9922	9922	9922	9922
p_a	mm WS ü	— 4	—4	— 3	3	2	— 2	— 9	—12	—16
P_a	kg/m² abs	9935	9936	9936	9937	9920	9920	9913	9910	9906
p_e	mm WS ü	812	966	1076	1147	1186	1171	1132	1087	1014
$p_e - p_a$	mm WS	816	970	1079	1150	1188	1173	1141	1099	1030
P_e/P_a gem.	kg m²/m² kg	1,0821	1,0976	1,1087	1,1157	1,1197	1,1182	1,1152	1,1109	1,1040
P_e/P_a (15°)	kg m²/m² kg	1,0845	1,1006	1,1114	1,1181	1,1198	1,1191	1,1170	1,1141	1,1106
Δp_d	mm WS	666,5	442,6	278,5	160,7	59,8	27,6	10,1	3,3	0
t_d	°C	32,2	33,3	33,7	34,1	29,1	31,1	33,7	34.7	
T_d	° abs	305.2	306,3	306,7	307,1	302,1	304,1	306,7	307,7	
$V\Delta p_d \cdot P_o/T_d$	kg/m² $\sqrt{\ }$ °	147,4	119,9	94,95	72,10	44,30	30,04	18,07	10,08	
V'	m³/sec	1,845	1,502	1,184	0,895	0,540	0,368	0,224	0,119	
V_{korr}	m³/sec	0,012	0,008	0,005	0,003	0,001	0,000	0,000	0.000	
V	m³/sec	1,833	1,494	1,179	0,892	0,539	0,368	0,224	0,119	0
t_e	°C	31,8	33,6	34,3	34,7	30,7	33,4	37,3	41,7	
t_a	°C	23,4	23,7	22,3	21,1	15,1	17,1	19,6	23,0	
Δt gem.	°	8,4	9,9	12,0	13,6	15,6	16,3	17,7	18,7	
Δt (15°)	°	8,1	9,6	11,6	13,3	15,5	16,1	17,4	18,2	
η pol. Temp.	%	82,3	82,4	75,5	71,6	62,2	59,2	53,3	49,4	
L/m³	mkg/m³	805	954	1062	1130	1165	1158	1140	1078	
Dyn. abl.		12,53	12,44	12,24	11,96	11,52	11,27	11,01	10,86	10,59
n	l/Min.	4850	4850	4850	4850	4850	4850	4850	4850	4850
N gem. Kuppl.	KW	20,15	19,42	17,81	15,55	11,98	9,92	7,88	6,60	4,43
N Lager + Vent.	KW	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
N gem. Rad	KW	19,73	19,00	17,39	15,13	11,56	9,50	7,46	6,18	4,01
N (15°)	KW	20,43	19,69	17,96	15,55	11,66	9,64	7,64	6,41	4,40
η pol. Leistg.	%	72,9	73,1	70,2	64,9	52,8	43,6	33,2	21,4	0

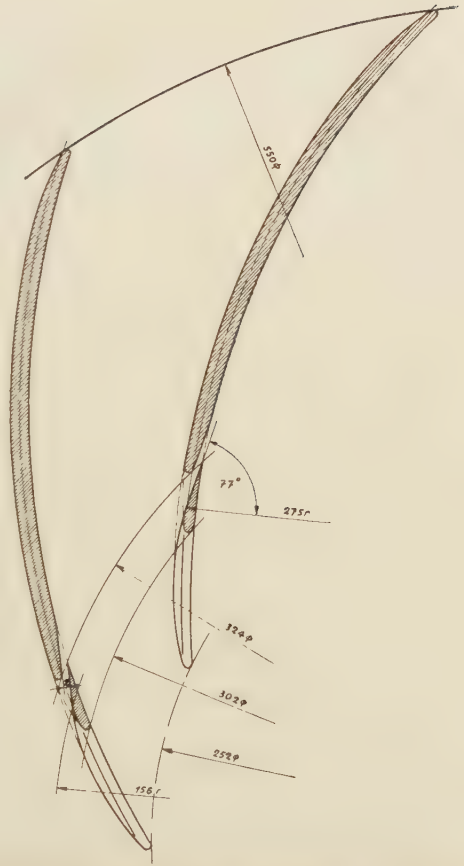

Fig. 24. Schlitzanordnung I
Maßstab 1 : 2,5

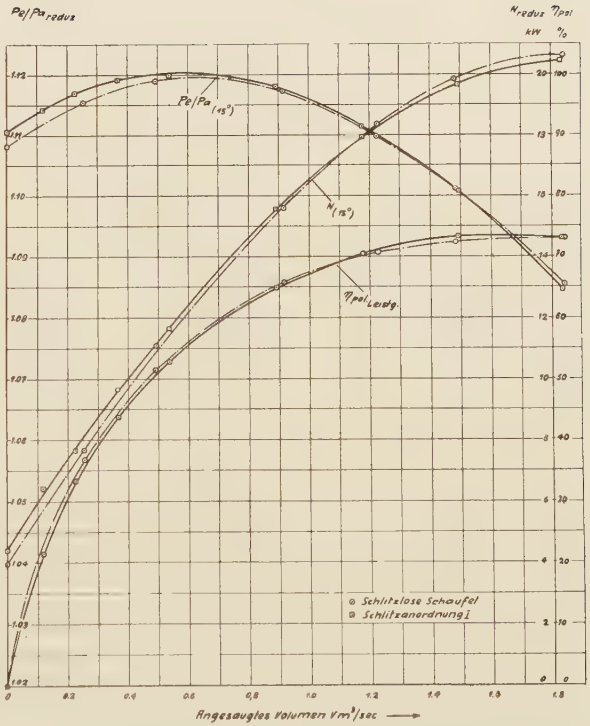

Fig. 25. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung I

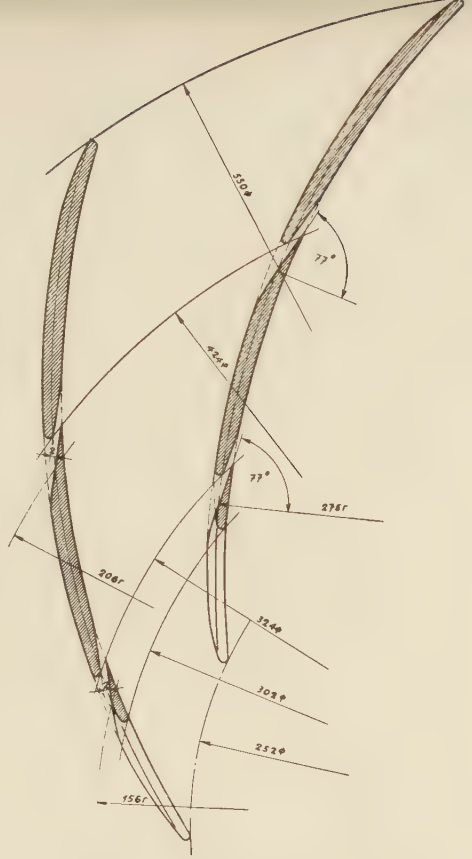

Fig. 26. Schlitzanordnung II
Maßstab 1 : 2,5

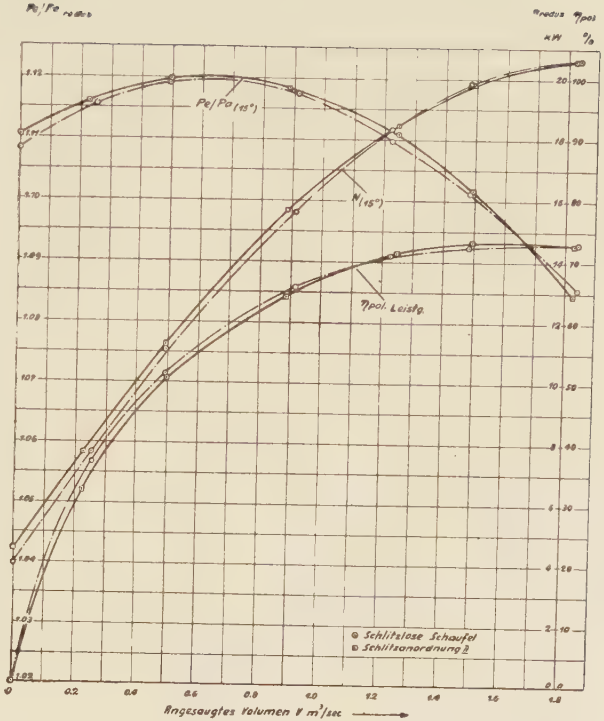

Fig. 27. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung II

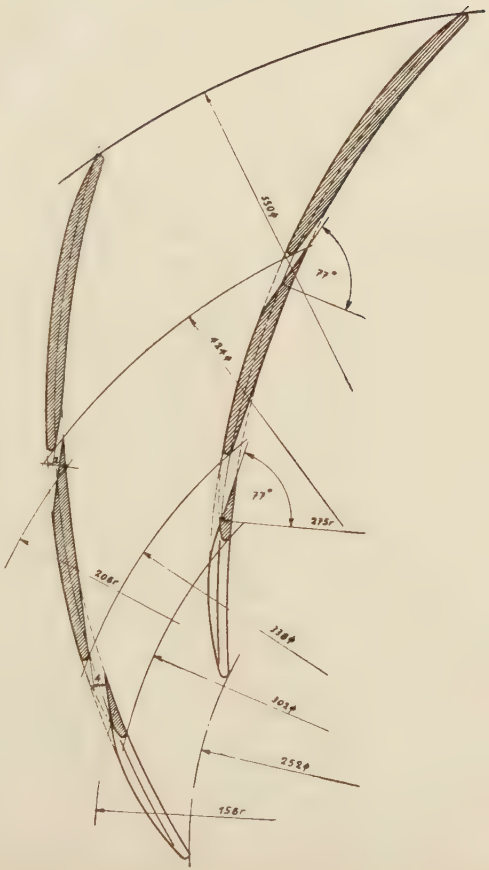

Fig. 28. Schlitzanordnung III
Maßstab 1 : 2,5

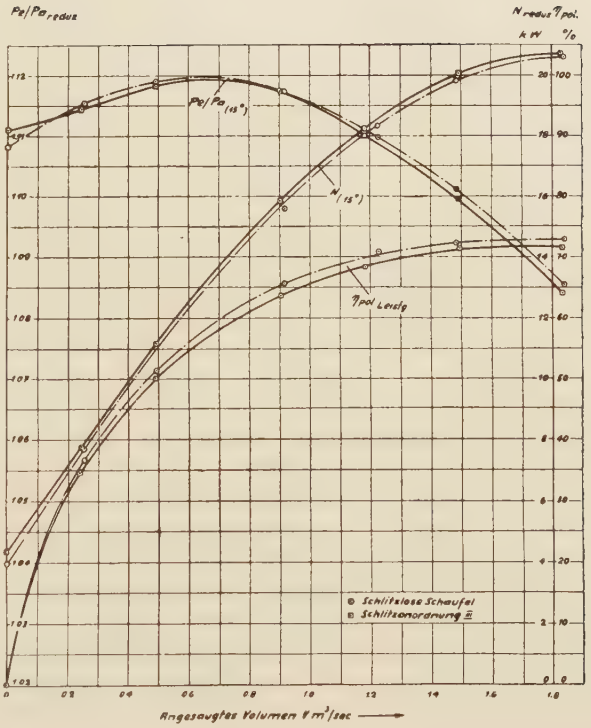

Fig. 29. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung III

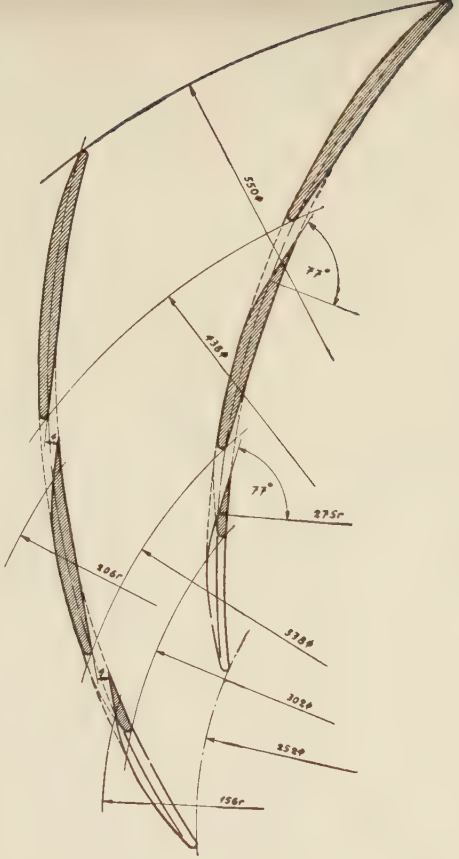

Fig. 30. Schlitzanordnung IV
Maßstab 1 : 2,5

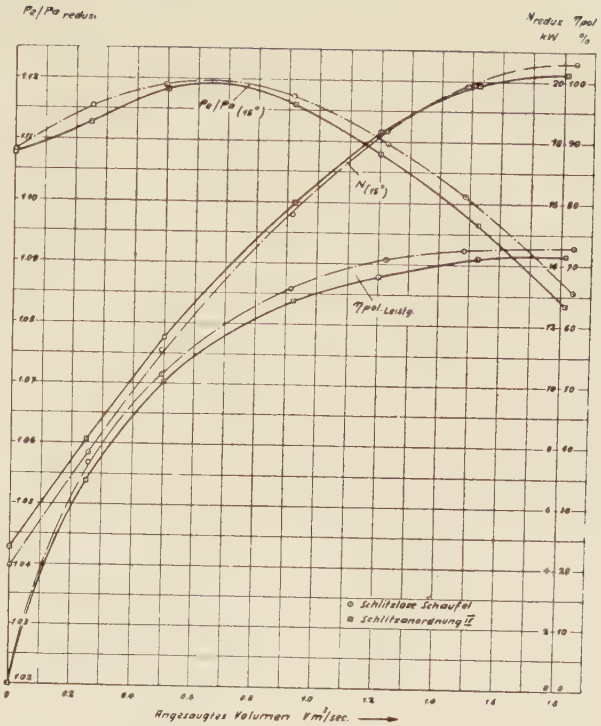

Fig. 31. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung IV

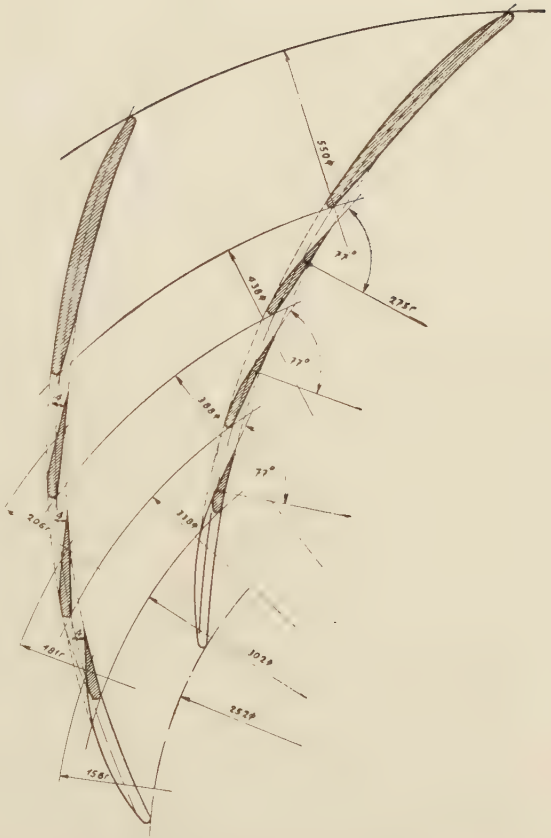

Fig. 32. Schlitzanordnung V
Maßstab 1 : 2,5

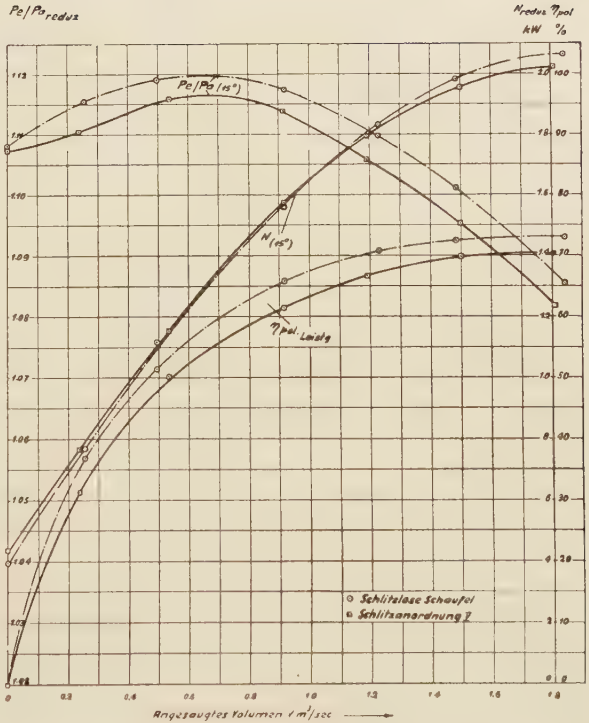

Fig. 33. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung V

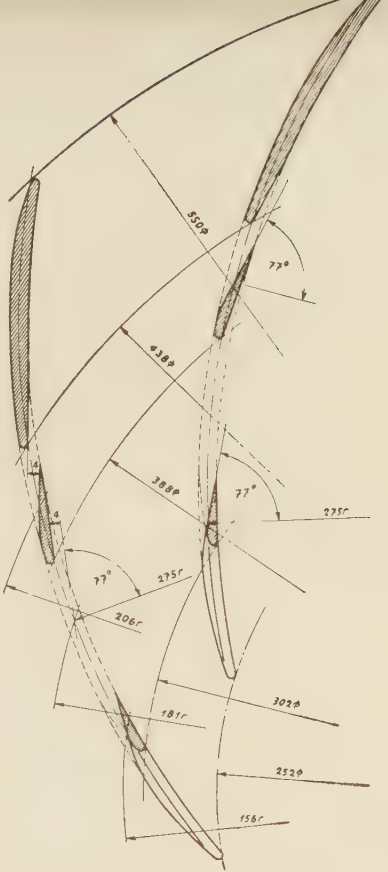

Fig. 34. Schlitzanordnung VI
Maßstab 1 : 2,5

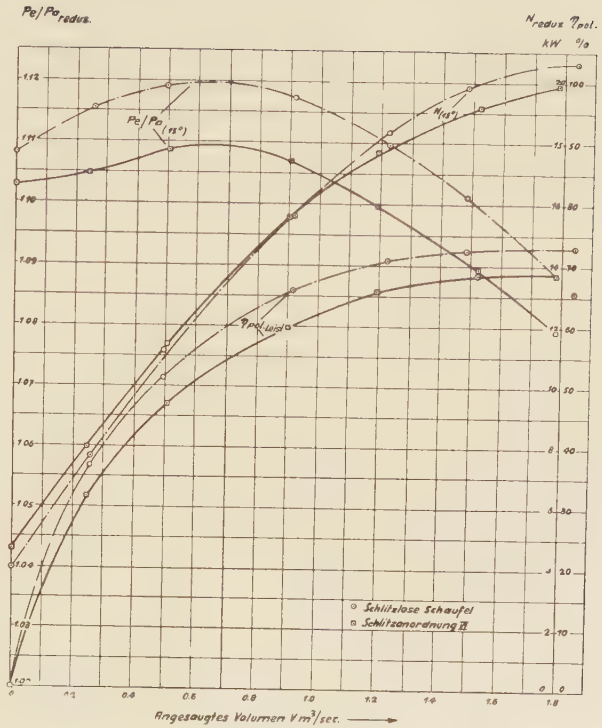

Fig. 35. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung VI

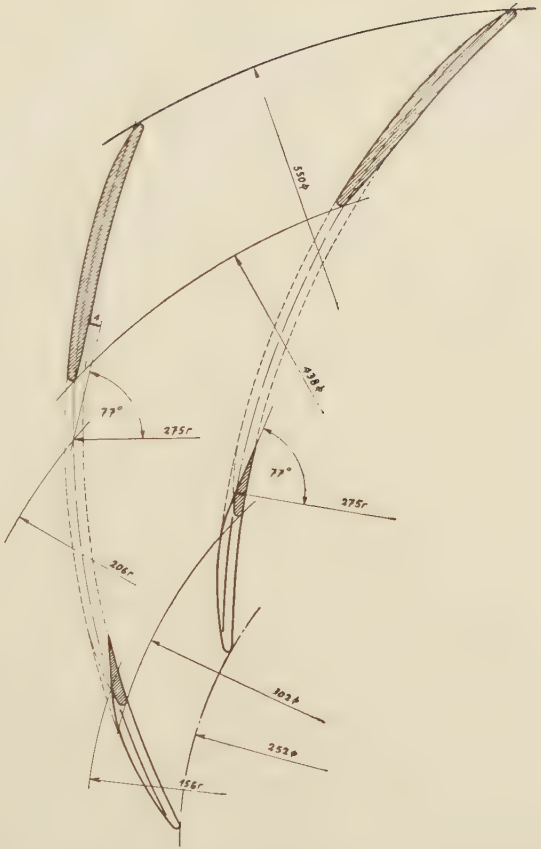

Fig. 36. Schlitzanordnung VII
Maßstab 1 : 2,5

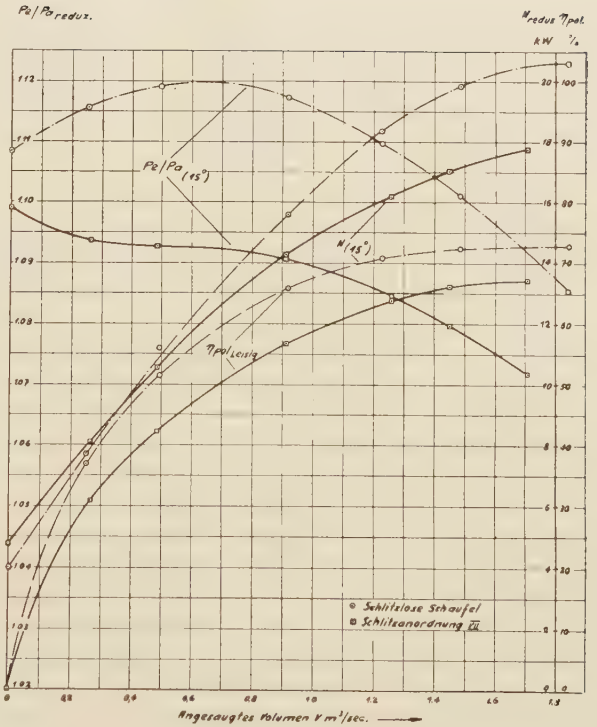

Fig. 37. Druckvolumen-, Wirkungsgrad- u. Leistungskurve
Schlitzanordnung VII

17. Zusammenfassung

Die aus der Prandtlschen Grenzschichttheorie ableitbare Erkenntnis, daß die in strömenden Medien öfters auftretenden Ablösungserscheinungen auf den Impulsverlust einer dünnen Schicht an der Begrenzungswand zurückzuführen sind, legt den Gedanken nahe, die Ablösung dieser „Grenzschicht" entweder durch vollständige Absaugung zu verhindern oder dadurch, daß man ihr durch Zuführen von Flüssigkeit, welche eine größere Geschwindigkeit besitzt, einen neuen Impuls erteilt. Letztere Möglichkeit wäre nach v. Kármán bei Kreiselrädern durch Anbringen von Schlitzen im Schaufelprofil konstruktiv leicht durchführbar, falls sich eine solche Maßnahme für den verfolgten Zweck als ausreichend erweisen würde.

Um diese Frage auf theoretischem Wege lösen zu können, wird von der Kármánschen Weiterentwicklung der Prandtlschen Grenzschichttheorie ausgegangen, welche für die Behandlung des vorliegenden Problems aber nicht ausreicht, da sie nur auf eine Strömung mit einem unveränderlichen Wert der äußeren Strömungsgeschwindigkeit beschränkt bleibt. Die Frage der Ablösung bei turbulenter Strömung welche in der Kármánschen Abhandlung nicht weiter diskutiert wird, ist nicht lösbar, falls wie dort das $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz für die Verteilung der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht bis in unmittelbare Wandnähe ausgedehnt wird. Die von diesem Punkte ab weitergeführte theoretische Behandlung fußt auf zwei Grundlagen. Die eine ist die, daß die einmal integrierte Grenzschichtgleichung

$$\frac{\delta}{\delta x}\int_0^{\delta} \varrho u^2 \, dy - U\frac{\delta}{\delta x}\int_0^{\delta} \varrho u \, dy + \delta\frac{d_p}{d_x} + \tau_0 = 0$$

oder Kármánsche Integralbedingung auch für variable Geschwindigkeit der äußeren Strömung integrierbar bleibt. Die Integration ist im Abschnitt 7 ausgeführt. Die zweite ist die, daß man zu einer genügend einfachen Ablösungsbedingung für Strömung mit variabler Geschwindigkeit gelangt, falls man der physikalisch notwendigen und experimentell begründeten Tatsache, daß auch bei turbulenter Strömung eine laminare „Wandschicht" vorhanden ist, in dem Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung Rechnung trägt. Die Dicke der Laminarschicht ist den experimentellen Messungen von van der Hegge Zijnen entsprechend angesetzt. Im übrigen wird angenommen, daß an der Grenze der Laminarschicht die Geschwindigkeit stetig in diejenige der turbu-

lenten Grenzschicht übergeht, für welche das $\frac{1}{7}$-Potenzgesetz beibehalten wird. Die so gewonnene Ablösungsbedingung ergibt, auf die Strömung im Diffusor und um einen Zylinder angewandt, mit der Erfahrung gut übereinstimmende Werte, so daß es zulässig erscheint, sie auch zur Bestimmung des Ablösungspunktes an der Kreiselradschaufel zu verwenden. Zu diesem Zweck ist die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung längs einer Schaufel notwendig. Da die theoretisch unter Voraussetzung reibungsfreier Strömung ermittelbaren Geschwindigkeiten zu Widersprüchen mit der Wirklichkeit führen, so werden experimentell ermittelte Geschwindigkeitsverteilungen zugrunde gelegt. Die zur Verhinderung der Ablösung notwendige Breite der Schaufelschlitze wird aus der Größe des der Grenzschicht zuzuführenden Impulses berechnet. Das Resultat der Berechnung ergibt so große Schlitzbreiten, daß die erfolgreiche Anwendung der Konstruktion fraglich erscheint. Im zweiten Teil wird über praktische Versuche berichtet, welche an einem Versuchsgebläse mit einer Reihe verschiedener Schlitzformen angestellt wurden. Diese Versuche bestätigen das im wesentlichen negative Resultat der theoretischen Untersuchung.

Zusammenstellung der zitierten Literatur

1) Spannhake: Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern. Hydraulische Probleme. VdI-Verlag 1926 S. 180.
2) Sörensen: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1927 S. 89.
3) Schulz: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1928 S. 10.
4) Busemann: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1928 S. 372.
5) Spannhake: Neue Darstellung der Potentialströmung durch Kreiselräder für beliebige Schaufelform. Vorträge Aerodynamik und verwandte Gebiete (Aachen 1929). Verlag Springer. Berlin 1930.
6) Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des 3. intern. Mathematikerkongresses 1904 (Heidelberg) S. 484. Verlag B. G. Teubner. Leipzig 1905.
7) Ackeret: Grenzschichtabsaugung. Zeitschrift des VdI 1926 S. 1153.
8) Blasius: Dissertation Göttingen 1907.
9) Boltze: Dissertation Göttingen 1908.
10) Hiemenz: Dissertation Göttingen 1911.
11) v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1921 S. 233.
12) Van der Hegge Zijnen: Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Dissertation Delft 1924.
13) Dönch: Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. VdI Forschungsheft Nr. 282.
14) Blasius: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. VdI Forschungsheft Nr. 131.
15) Taylor: Advisory Comittee for Aeronautics. Reports and Memoranda No. 191. London 1916.
16) Flügel: Ein neues Verfahren der graphischen Integration, angewandt auf Strömungen idealer Flüssigkeiten in Kreiselrädern. Dissertation. Verlag Oldenbourg. München 1914.
17) Stodola: Dampf- und Gasturbinen. 5. Aufl. Verlag Springer, Berlin 1922, S. 816 sowie: Nachtrag zur 5. Aufl. Berlin 1924, S. 22.
18) Carrard: Sur le calcul des roues centrifuges. La Technique Moderne 1923 S. 65.
19) Ostertag: Kolben- und Turbokompressoren. 3. Aufl. Verlag Springer, Berlin 1923, S. 212.
20) Oertli: Untersuchung der Wasserströmung durch ein rotierendes Zellen-Kreiselrad. Dissertation Zürich 1923.

Lebenslauf

Verfasser wurde am 11. Juni 1906 als Sohn des Rektors A. Gauger in Stettin geboren. Nach Absolvierung eines städtischen Realgymnasiums in Stettin studierte er an der Technischen Hochschule Breslau in der Fakultät für Maschinenwirtschaft und legte daselbst im Juli 1926 die Diplomvorprüfung ab.

Hierauf wurde das Studium an der Technischen Hochschule Berlin fortgesetzt unter besonderer Spezialisierung auf Turbo-Kraft- und Arbeitsmaschinen sowie allgemeine aero- und hydrodynamische Fächer. Nach Ablegung der Diplomhauptprüfung im Dezember 1928 begann er seine Ingenieurtätigkeit mit der Berechnung und Konstruktion von Turbogebläsen und -kompressoren bei der Demag A.G. in Mülheim/Ruhr. Im November 1929 trat er in die Firma Brown, Boveri & Cie in Baden (Schweiz) als Ingenieur des Turbinen-Versuchslokales ein.

Die Anregung zur Bearbeitung der vorliegenden Aufgabe erhielt er im Sommer 1929 von Herrn Dr.-Ing. v. Kármán, Professor am California Institute of Technology in Pasadena, Calif. U.S.A., derzeit Vorstand des Aerodynamischen Institutes der Technischen Hochschule Aachen.